THÈSE

DE DOCTORAT DE TROISIÈME CYCLE DE MATHÉMATIQUES PURES

présentée

A L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE

DE GRENOBLE

par

Ghislaine CATZ

SUR LE FIBRE TANGENT D'ORDRE DEUX

Soutenue le 29 mai 1973 devant la Commission d'examen

C. CHABAUTY Président

J. KLEIN

J.L. KOSZUL

Examinateurs

THÈSE

DE DOCTORAT DE TROISIÈME CYCLE DE MATHÉMATIQUES PURES

présentée

A L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE
DE GRENOBLE

par

Ghislaine CATZ

SUR LE FIBRE TANGENT D'ORDRE DEUX

Soutenue le 29 mai 1973 devant la Commission d'examen

C. CHABAUTY Président

J. KLEIN
J.L. KOSZUL
Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

SOMMAIRE

Pages

INTRODUCTION I

Chapitre I - TENSEURS ET CHAMPS CANONIQUES SUR LE FIBRE TANGENT 1

1. Définition du fibré tangent d'ordre 2 1
2. Suites exactes de fibrés vectoriels 3
3. Tenseurs canoniques sur T_2M 6
4. Champs canoniques sur T_2M 9
5. Homogénéité 13
6. Sprays de types 1 et 2 18
7. Formes semi-basiques 23

Chapitre II - CONNEXIONS SUR LE FIBRE TANGENT D'ORDRE 2 26

1. Définitions 26
2. Connexions et suites exactes 30
3. Connexions et sprays 31
4. Passage d'un type de connexion à l'autre 37
5. Décomposition d'une connexion de type 2 41
6. Courbure d'une connexion 43
7. Connexion sur T_2M induite par une connexion sur M 44

Chapitre III - STRUCTURE PRESQUE TANGENTE D'ORDRE 2 .. 54

1. Structure presque tangente d'ordre 2 sur T_2M 54
2. Structure presque tangente d'ordre 2 sur une variété de dimension 3n 58
3. Structure presque tangente d'ordre k 59

BIBLIOGRAPHIE 65

INTRODUCTION

Soit M une variété différentiable. Le fibré tangent d'ordre 2 de M, noté T_2M, est l'ensemble des jets d'ordre 2, d'origine O, des applications de $\mathbb{R}$ dans M ; T_2M est muni naturellement d'une structure de variété différentiable de dimension $3n$.

Dans un article (cf. [1]), K. Yano et S. Ishihara définissent sur T_2M, à l'aide de coordonnées locales, les relevés d'ordre 0, 1 et 2, d'objets définis sur M : fonctions, champs de vecteurs, tenseurs,... . En particulier, les relevés du tenseur identité ont pour matrices associées :

$$I^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad I^I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix} \qquad I^{II} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

L'objet premier de notre travail est de définir sur T_2M, de façon intrinsèque, les tenseurs I^0 et I^I. Pour cela, nous nous servons des deux structures de variété fibrée de T_2M :

- l'une de base M, la projection π_2 étant l'application but :

$$T_2M \to M$$
$$X = J^2_0 f \to f(0) ,$$

- l'autre de base TM, de projection π_{12} :

$$\pi_{12} : T_2M \to TM$$
$$X = J^2_0 f \to J^1_0 f$$

TM étant identifié à l'espace des jets d'ordre 1, d'origine O des applications de $\mathbb{R}$ dans M.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534920_0025

La seconde structure fibrée est plus précisément une structure de variété fibrée affine.

Par une méthode classique, nous construisons à partir de chacune des variétés fibrées précédentes, une suite exacte de fibrés vectoriels de base T_2M et deux isomorphismes h_1 et h_2 permettant de passer de l'une à l'autre.

$$(1)\qquad 0 \longrightarrow V^{\pi_2}T_2M \xrightarrow{i_1} TT_2M \xrightarrow{s_1} T_2M \underset{M}{\times} TM \longrightarrow 0$$

$$(2)\qquad 0 \longrightarrow V^{\pi_{12}}T_2M \xrightarrow{i_2} TT_2M \xrightarrow{s_2} T_2M \underset{TM}{\times} TTM \longrightarrow 0$$

(h_2 : $T_2M \to TT_2M$; h_1 : $T_2M \to TT_2M$)

Nous définissons alors deux tenseurs canoniques de type $(1,1)$:

$$J_1 = i_2 \circ h_1 \circ s_1$$

$$J_2 = i_1 \circ h_2 \circ s_2$$

J_1 étant le tenseur I^0 et J_2 étant $2I^I$.

A ces deux suites exactes, sont associés également deux champs de vecteurs canoniques C_1 et C_2 , tels que, si $(x_i,y_i,z_i)_{i=1,\ldots,n}$ est un système de coordonnées locales dans T_2M ,

$$C_1(x_i,y_i,z_i) = (x_i,y_i,z_i,0,0,y_i)$$

$$C_2(x_i,y_i,z_i) = (x_i,y_i,z_i,0,y_i,2z_i) .$$

Le champ de vecteurs C_2 permet d'introduire une notion d'homogénéité ; en effet, à un changement de paramètre dans $\mathbf{R}$: $t \to \lambda t$, avec λ strictement positif, est associée, dans T_2M , la transformation suivante :

$$(x_i,y_i,z_i) \longrightarrow (x_i,\lambda y_i,\lambda^2 z_i) .$$

On dira alors qu'une fonction f sur T_2M , C^∞ , est homogène de degré r si : $f(x_i,\lambda y_i,\lambda^2 z_i) = \lambda^r f(x_i,y_i,z_i)$.

Or, ceci est équivalent à $C_2 f = rf$.

De même, on dira qu'un champ de vecteurs A sur T_2M , (respect. une 1-forme vectorielle L) est homogène de degré r si $[C_2, A]$ est égal à rA (resp. $[C_2, L] = rL$).

Nous nous intéressons ensuite à certains types de champs de vecteurs sur T_2M :

Parmi les courbes définies sur T_2M , on peut distinguer celles dont la projection sur TM est le relevé d'une courbe de M , et parmi celles-ci, celles qui sont le relevé sur T_2M d'une courbe de M .

Les premières sont du type : $t \to (x_i(t), \frac{dx_i(t)}{dt}, z_i(t))$, les secondes du type : $t \to (x_i(t), \frac{dx_i(t)}{dt}, \frac{d^2x_i(t)}{dt^2})$.

On dit qu'un champ de vecteurs est un spray de type 1 (resp. type 2) si sés courbes intégrales sont du premier type (resp. second type), et si, de plus, il est homogène, (le degré d'homogénéité étant nécessairement un) ; localement les composantes d'un spray de type 1 sont $(y_i, S_i(x,y,z), \overline{S}_i(x,y,z))$ et celles d'un spray de type 2 sont $(y_i, z_i, S_i(x,y,z))$.

Tout ceci fait l'objet du premier chapitre.

Dans le second chapitre, nous étudions des 1-formes vectorielles particulières ; J. Grifone a défini une connexion sur M , comme étant une 1-forme vectorielle sur TM , Γ , vérifiant :

$$\begin{cases} J\Gamma = J \\ \Gamma J = -J \end{cases}$$

où J est le tenseur canonique de la structure presque tangente de TM (cf. [2]).

Les conditions nécessaires pour qu'une 1-forme vectorielle sur T_2M se projette en une connexion sur TM nous amènent à introduire la définition suivante :

Une connexion de type 1 sur T_2M est une 1-forme vectorielle Γ sur T_2M , vérifiant :

$$\begin{cases} J_1\Gamma = J_1 \\ \Gamma J_2 = -J_2 \end{cases} .$$

On dira que Γ est une connexion de type 2 si elle vérifie :

$$\begin{cases} J_2\Gamma = J_2 \\ \Gamma J_1 = -J_1 \end{cases} .$$

Une connexion Γ est homogène si $[C_2,\Gamma]$ est nul. Chaque type de connexion est lié à une structure de variété fibrée de T_2M :

Les propositions II-1.1. et II-1.2. permettent d'associer à toute connexion Γ deux projecteurs supplémentaires h et v , l'un horizontal, l'autre vertical : $h = \frac{1}{2}(I+\Gamma)$; $v = \frac{1}{2}(I-\Gamma)$.

Si Γ est une connexion de type 1 , h et v décomposent, au-dessus de X appartenant à T_2M , l'espace T_XT_2M en $v(T_XT_2M)$ et $h(T_XT_2M)$; or $v(T_XT_2M)$ est isomorphe à l'espace tangent en X à la fibre de (T_2M , M , π_2) passant par X , et $h(T_XT_2M)$ est isomorphe à l'espace tangent en $\pi_2(X)$ à la variété de base, soit $T_{\pi_2(X)}M$. Nous avons une situation analogue pour une connexion de type 2 et la variété fibrée (T_2M , TM , π_{12}) .

Dans le paragraphe 2 , on démontre que la donnée d'une connexion de type 1 (resp. type 2) est équivalente à la donnée d'une scission de la suite exacte (1) (resp. (2)).

Les paragraphes 3 , 4 et 5 étudient les rapports entre connexions et sprays :

A une connexion de type 1 (resp. type 2) est associé canoniquement un spray de type 1 (type 2). Réciproquement, nous construisons deux connexions "élémentaires", homogènes, de types 1 et 2, à partir d'un spray S de type 2

$$\Gamma_1 = \frac{1}{3}\{2[J_2,S] + 2\,[[J_1,S],S] - I\}$$

$$\Gamma_2 = \frac{1}{3}\{2[J_2,S] + I\} \quad \text{(cf. Prop. II-3.3. et II-3.4.).}$$

De plus, la proposition II-5.3. montre qu'une connexion Γ de type 2 est entièrement déterminée par le spray S qui lui est associé, et par sa torsion forte : $T_2 = i_S[J_2,\Gamma]$. Plus précisément, on a : $\Gamma = \Gamma_2 + \frac{1}{3}T_2$, où Γ_2 est la connexion "élémentaire" précédente.

Enfin, dans le dernier paragraphe, nous montrons que toute connexion linéaire Γ sur M se relève en une connexion Γ_1 de type 1 sur T_2M ; de plus Γ_1 est homogène et projetable en Γ sur TM.

Dans le dernier chapitre, nous étudions la structure particulière de T_2M ; T_2M est muni d'une G-structure, où G est le sous-groupe de Lie de $G\ell(3n,\mathbb{R})$ constitué des matrices $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ B & A & 0 \\ C & 2B & A \end{pmatrix}$ où A appartient à $G\ell(n,\mathbb{R})$ et B et C appartiennent à $M_n(\mathbb{R})$. Le tenseur J_2 est alors un tenseur spécial adapté à cette G-structure ; cette G-structure est intégrable.

On montre que la G-structure de T_2M est caractérisée par l'existence du tenseur J_2, qui est de rang $2n$ et qui vérifie $J_2^3 = 0$.

On définit alors une structure presque tangente d'ordre 2 sur une variété de dimension $3n$ et plus généralement une structure presque tangente d'ordre k sur une variété de dimension $(k+1)n$.

Je remercie Monsieur KLEIN et tous ceux qui, d'une façon ou d'une autre, m'ont aidée à présenter ce travail.

CHAPITRE I

TENSEURS ET CHAMPS CANONIQUES SUR LE FIBRE TANGENT D'ORDRE 2

Les variétés M considérées sont différentiables de classe C^∞, de dimension finie n, et paracompactes.

§ 1 - DEFINITION DU FIBRE TANGENT D'ORDRE 2.

Soient M une variété, T_2M l'ensemble des jets d'ordre 2 des applications différentiables de $\mathbb{R}$ dans M, d'origine 0.

Un élément de T_2M s'écrit : $X = J^2_0 f$, avec f application de $\mathbb{R}$ dans M.

Nous avons les projections suivantes :

$$\pi_{12} : \quad T_2M \longrightarrow TM$$
$$X = J^2_0 f \qquad \pi_{12}(X) = J^1_0 f \ .$$

(TM est identifié à l'ensemble des jets d'ordre 1 et d'origine 0 des applications différentiables de $\mathbb{R}$ dans M).

$$\pi_2 : \quad T_2M \longrightarrow M$$
$$X = J^2_0 f \qquad \pi_2(X) = f(0) \ .$$

Soit $X = J^2_0 f$ un élément de T_2M ; si $(U, (x_1 \ldots x_n))$ est une carte locale de M en $f(0)$, le jet X est déterminé par :

$$\left|\begin{array}{l} x_i(X) = x_i(f(0)) \\ y_i(X) = \dfrac{dx_i \circ f}{dt}(0) \\ z_i(X) = \dfrac{d^2 x_i \circ f}{dt^2}(0) \end{array}\right. \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

Sur $\pi_2^{-1}(U)$, les applications x_i, y_i, z_i , $(i=1,\ldots,n)$ forment un système de coordonnées locales. Les cartes $(\pi_2^{-1}(U),(x_i,y_i,z_i))$ munissent T_2M d'une structure de variété différentiable de dimension $3n$; comme $(x_i,y_i)_{i=1,\ldots,n}$ est un système de coordonnées locales de TM au voisinage de $\pi_{12}(X)$, les triplets (T_2M,TM,π_{12}) et (T_2M,M,π_2) sont des variétés fibrées. Plus précisément (T_2M,TM,π_{12}) est un fibré affine. Les applications tangentes $T(\pi_{12})$ et $T(\pi_2)$ font de TT_2M une variété fibrée sur TTM et une variété fibrée sur TM .

Définition I-1.1.

Un vecteur tangent à T_2M est π_{12}-vertical (respectivement π_2-vertical) si sa projection par $T(\pi_{12})$ (resp. $T(\pi_2)$) sur TTM (resp. TM) est nulle.

Un élément A de TT_2M , π_{12}-vertical, s'écrit localement :

$$(x,y,z,0,0,r) .$$

Un élément A , π_2-vertical , s'écrit : $(x,y,z,0,q,r)$.

On note $V^{\pi_{12}}T_2M$ l'ensemble des éléments π_{12}-verticaux de TT_2M , et $V^{\pi_2}T_2M$ l'ensemble des éléments π_2-verticaux de TT_2M . Soit π la projection naturelle de TT_2M sur T_2M ; $(V^{\pi_{12}}T_2M,T_2M,\pi)$ et $(V^{\pi_2}T_2M,T_2M,\pi)$ sont deux sous-fibrés vectoriels du fibré tangent à T_2M .

Nous allons définir deux suites exactes de fibrés vectoriels sur T_2M , à l'aide des deux structures de variété fibrée sur T_2M .

§ 2 - SUITES EXACTES DE FIBRES VECTORIELS.

Considérons la variété fibrée (T_2M, M, π_{12}) . Soient X un élément de T_2M , x sa projection sur M ($x = \pi_2(X)$) , $\pi_2^{-1}\pi_2(X)$ la fibre de (T_2M, M, π_2) passant par X . L'injection canonique de $\pi_2^{-1}.\pi_2(X)$ dans T_2M induit l'injection i_X de $T_X\pi_2^{-1}\pi_2(X)$ dans T_XT_2M . Nous avons la suite exacte d'espaces vectoriels :

$$0 \longrightarrow T_X\pi_2^{-1}\pi_2(X) \xrightarrow{i_X} T_XT_2M \xrightarrow{T_X(\pi_2)} T_xM \longrightarrow 0 .$$

Par l'injection i_X , l'espace vectoriel $T_X\pi_2^{-1}.\pi_2(X)$ s'identifie à $V_X^{\pi_2}T_2M$, espace des vecteurs π_2-verticaux tangents à T_2M en X . D'où la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow V_X^{\pi_2}T_2M \xrightarrow{i_{1_X}} T_XT_2M \xrightarrow{T_X(\pi_2)} T_xM \longrightarrow 0 .$$

L'ensemble $V^{\pi_2}T_2M$ est un fibré vectoriel de base T_2M , et l'application i_1 , définie fibre par fibre par i_{1_X} , est un morphisme injectif de fibrés vectoriels.

Soit $T_2M \underset{M}{\times} TM$ le produit fibré au-dessus de M de la variété fibrée (T_2M, M, π_2) et du fibré vectoriel (TM, M, p) , c'est un fibré vectoriel de base T_2M , dont la fibre au-dessus de X est $T_{\pi_2(X)}M$; appelons s_1 le produit fibré $\pi \underset{M}{\times} T(\pi_2)$, où π est la projection de TT_2M sur T_2M ; s_1 est un morphisme surjectif de TT_2M sur $T_2M \underset{M}{\times} TM$.

La suite exacte précédent d'espaces vectoriels induit la suite exacte de fibrés vectoriels, de base T_2M :

(1)
$$\boxed{0 \longrightarrow V^{\pi_2}T_2M \xrightarrow{i_1} TT_2M \xrightarrow{s_1} T_2M \underset{M}{\times} TM \longrightarrow 0}$$

En coordonnées locales, si (x,y,z,p,q) appartient à $V^{\pi_2}T_2M$, alors : $i_1(x,y,z,p,q) = (x,y,z,0,p,q)$; si (x,y,z,p,q,r) appartient à TT_2M , $s_1(x,y,z,p,q,r) = ((x,y,z);(x,p))$.

Une construction analogue à la précédente, faite avec la variété fibrée (T_2M, TM, π_{12}) donne la suite exacte d'espaces vectoriels :

$$0 \longrightarrow V_X^{\pi_{12}} T_2M \xrightarrow{i_{2_X}} T_X T_2M \xrightarrow{T_X(\pi_{12})} T_{\pi_{12}(X)} TM \longrightarrow 0 \quad .$$

D'où la suite exacte de fibrés vectoriels de base T_2M :

(2) $$\boxed{0 \longrightarrow V^{\pi_{12}} T_2M \xrightarrow{i_2} TT_2M \xrightarrow{s_2} T_2M \underset{TM}{\times} TTM \longrightarrow 0}$$

où : i_2 est l'application définie sur les fibres par i_{2_X} ,

s_2 est le produit fibré $\pi \underset{TM}{\times} T(\pi_{12})$,

$T_2M \underset{TM}{\times} TTM$ désigne le produit fibré de (T_2M, TM, π_{12}) et du fibré tangent à la variété TM , soit (TTM, TM, p') .

Localement, si (x,y,z,p) appartient à $V^{\pi_{12}} T_2M$, $i_2(x,y,z,p)$ est égal à $(x,y,z,0,0,p)$ et si (x,y,z,p,q,r) appartient à TT_2M , alors : $s_2(x,y,z,p,q,r) = ((x,y,z) ; (x,y,p,q))$.

Proposition I-2.1.

Les fibrés vectoriels de base T_2M , $V^{\pi_{12}} T_2M$ et $T_2M \underset{M}{\times} TM$, sont isomorphes.

Soient X appartenant à T_2M et Y un élément de $\pi_{12}^{-1}\pi_{12}(X)$; X et Y s'écrivent respectivement $J_0^2 f$ et $J_0^2 g$.

Soit F_X l'application de $\pi_{12}^{-1}\pi_{12}(X)$ dans $\mathbb{R}^* \otimes T_{\pi_{12}(X)} TM$ qui à Y associe $T_o(J^1 g) - T_o(J^1 f)$. On vérifie que F_X est indépendante du choix de f et g et qu'elle est injective. L'espace d'arrivée est isomorphe à $T_{\pi_{12}(X)} TM$; l'image de Y par F_X est un vecteur vertical de $T_{\pi_{12}(X)} TM$; l'espace des vecteurs verticaux de $T_{\pi_{12}(X)} TM$ étant isomorphe à l'espace tangent $T_{\pi_2(X)} M$, on considère F_X comme une application injective de $\pi_{12}^{-1}\pi_{12}(X)$ dans $T_{\pi_{12}(X)} M$.

L'application linéaire $T_X(F_X)$ est donc un homomorphisme injectif de $T_X\pi_{12}^{-1}\circ\pi_{12}(X)$ dans $T_{\pi_2(X)}M$. Les espaces vectoriels $T_X\pi_{12}^{-1}\circ\pi_{12}(X)$ et $T_{\pi_2(X)}M$ étant de dimension n , l'application précédente est un isomorphisme. On en déduit un isomorphisme de $V_X^{\pi_{12}}T_2M$ sur $T_{\pi_2(X)}M$, qui permet de définir un isomorphisme g_1 du fibré $V^{\pi_{12}}T_2M$ sur $T_2M \underset{M}{\times} TM$.

Proposition I-2.2.

Les fibrés vectoriels de base T_2M , $V^{\pi_2}T_2M$ et $T_2M \underset{TM}{\times} TTM$, sont isomorphes.

Soit X un élément de T_2M . Les fibres respectives au-dessus de X des fibrés vectoriels précédents sont $V_X^{\pi_2}T_2M$ et $T_{\pi_{12}(X)}TM$.

Soit $(x_i,y_i,z_i)_{i=1\ldots n}$ un système de coordonnées locales sur T_2M , au voisinage de X ; $((\frac{\partial}{\partial y_i})_X\ ,\ (\frac{\partial}{\partial z_i})_X)_{i=1\ldots n}$ constitue une base de $V_X^{\pi_2}T_2M$ et $((\frac{\partial}{\partial x_i})_{\pi_{12}(X)}\ ,\ (\frac{\partial}{\partial y_i})_{\pi_{12}(X)})_{i=1\ldots n}$ une base de $T_{\pi_{12}(X)}TM$. Soit g_{2_X} l'application de $V_X^{\pi_2}T_2M$ dans $T_{\pi_{12}(X)}TM$ définie par :

$$\left|\begin{array}{l} g_{2_X}((\frac{\partial}{\partial y_i})_X) = (\frac{\partial}{\partial x_i})_{\pi_{12}(X)} \\ g_{2_X}((\frac{\partial}{\partial z_i})_X) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial y_i})_{\pi_{12}(X)} \end{array}\right. .$$

La définition de g_{2_X} est indépendante du choix de coordonnées. En effet, si $(x'_i)_{i=1\ldots n}$ est un second système de coordonnées sur M au voisinage de $\pi_2(X)$, il induit le système $(x'_i,y'_i,z'_i)_{i=1\ldots n}$ au voisinage de X , et l'on a :

$$\left|\begin{array}{l} x_j = x_j(x'_i) \\ y_j = \dfrac{\partial x_j}{\partial x'_i}\, y'_i \\ z_j = \dfrac{\partial x_j}{\partial x'_i}\, z'_i + \dfrac{\partial^2 x_j}{\partial x'_h\, \partial x'_i}\, y'_h y'_i \end{array}\right. .$$

D'où dans $T_{\pi_{12}(X)}TM$:

$$(\frac{\partial}{\partial x'_i})_{\pi_{12}(X)} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}(\frac{\partial}{\partial x_j})_{\pi_{12}(X)} + \frac{\partial^2 x_j}{\partial x'_i \partial x'_k} y'_k (\frac{\partial}{\partial y_j})_{\pi_{12}(X)}$$

et dans $V_X^{\pi_2} T_2 M$:

$$(\frac{\partial}{\partial y'_i})_X = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}(\frac{\partial}{\partial y_j})_X + 2\frac{\partial^2 x_j}{\partial x'_k \partial x'_i} y'_k (\frac{\partial}{\partial z_j})_X \quad .$$

Calculons $g_{2_X}((\frac{\partial}{\partial y'_i})_X)$:

$$g_{2_X}((\frac{\partial}{\partial y'_i})_X) = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} g_{2_X}((\frac{\partial}{\partial y_j})_X) + 2\frac{\partial^2 x_j}{\partial x'_k \partial x'_i} y'_k g_{2_X}((\frac{\partial}{\partial z_j})_X)$$

$$= \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}(\frac{\partial}{\partial x_j})_{\pi_{12}(X)} + 2\frac{\partial^2 x_j}{\partial x'_k \partial x'_i} y'_k \times \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial y_j})_{\pi_{12}(X)}$$

$$= (\frac{\partial}{\partial x'_i})_{\pi_{12}(X)} \quad .$$

On vérifie de la même manière :

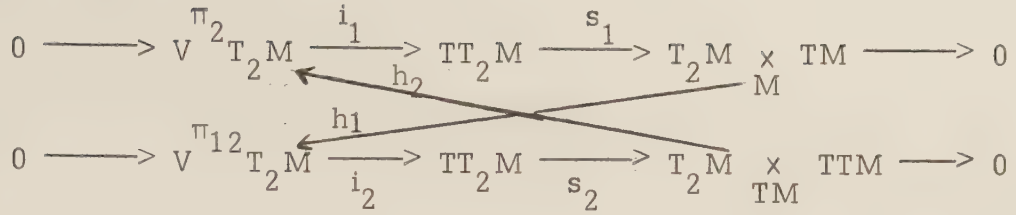
$$g_{2_X}((\frac{\partial}{\partial z'_i})_X) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial y'_i})_{\pi_{12}(X)} \quad .$$

Soit g_2 l'application du fibré $(V^{\pi_{12}} T_2 M , T_2 M , \pi)$ dans le fibré vectoriel $(T_2 M \underset{TM}{\times} TTM , T_2 M)$, définie par l'isomorphisme g_{2_X} ; g_2 est un isomorphisme de fibrés vectoriels.

Localement : $g_2(x,y,z,p,q) = ((x,y,z) ; (x,y,p,\frac{1}{2}q)$. Les deux suites exactes vont permettre de définir deux tenseurs canonique sur la variété $T_2 M$.

§ 3 - TENSEURS CANONIQUES SUR $T_2 M$.

Désignons par h_1 et h_2 les isomorphismes réciproques de g_1 et g_2 . Nous avons le diagramme suivant :



Définition I-3.1.

Soit le tenseur canonique de type (1,1) sur T_2M suivant :

$$\boxed{J_1 = i_2 \circ h_1 \circ s_1} \quad .$$

Localement : $J_1(x,y,z,p,q,r) = (x,y,z,0,0,p)$.

Si X appartient à T_2M , l'endomorphisme J_{1_X} est de rang n , sa matrice étant la suivante :

$$J_{1_X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

On définit de manière équivalente un second tenseur.

Définition I-3.2.

Soit le tenseur canonique de type (1,1) sur T_2M suivant :

$$\boxed{J_2 = i_1 \circ h_2 \circ s_2} \quad .$$

Localement : $J_2(x,y,z,p,q,r) = (x,y,z,0,p,2q)$.

L'endomorphisme J_{2_X} est de rang 2n ; sa matrice est :

$$J_{2_X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 2I & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

D'après la construction des tenseurs J_1 et J_2 , nous avons :

$$\text{Ker } J_2 = \text{Im } J_1 = V^{\pi_{12}}T_2M \ .$$

$$\text{Ker } J_1 = \text{Im } J_2 = V^{\pi_2}T_2M \ .$$

De plus, J_1 et J_2 vérifient :

$$\boxed{J_1^2 = 0 \; ; \; J_1 \circ J_2 = 0 \; ; \; J_2^2 = 2J_1 \; ; \; J_2^3 = 0}$$

Propriété I-3.1.

Les deux-formes vectorielles $[J_1,J_1]$, $[J_2,J_2]$ et $[J_1,J_2]$ sont nulles.

Soient A et B deux champs de vecteurs sur T_2M . Nous avons :

$$\frac{1}{2}[J_2,J_2](A,B) = [J_2A,J_2B] + 2J_1[A,B] - J_2[A,J_2B] - J_2[J_2A,B] \quad .$$

Le calcul de cette expression en coordonnées locales donne zéro, d'où : $[J_2,J_2] = 0$.

On en déduit l'identité :

$$[J_2A,J_2B] = J_2[A,J_2B] + J_2[J_2A,B] - 2J_1[A,B] \qquad (1)$$

De même par le calcul, nous obtenons : $[J_1,J_1] = 0$.

Comme :

$\frac{1}{2}[J_1,J_1](A,B) = [J_1A,J_1B] - J_1[A,J_1B] - J_1[J_1A,B]$, on a :

$$[J_1A,J_1B] = J_1[A,J_1B] + J_1[J_1A,B] \qquad (2).$$

Exprimons $[J_1,J_2](A,B)$:

$$[J_1,J_2](A,B) = [J_1A,J_2B] + [J_2A,J_1B] - J_1[A,J_2B] - J_2[J_1A,B] - J_2[A,J_1B] - J_1[J_2A,B] \quad .$$

Remplaçant A par J_2A dans (1), on obtient :

$$2[J_1A,J_2B] = J_2[J_2A,J_2B] + 2J_2[J,A,B] - 2J_1[J_2A,B] \quad .$$

En prenant les images des deux membres de l'égalité (1) par J_2 , on a :

$$J_2[J_2A,J_2B] = 2J_1[A,J_2B] + 2J_1[J_2A,B] \quad .$$

De ces deux dernières égalités, nous déduisons :

$$[J_1A,J_2B] = J_2[J_1A,B] + J_1[A,J_2B] \qquad (3).$$

L'égalité (3) implique : $[J_1,J_2](A,B) = 0$.

En résumé, les relations suivantes sont vérifiées pour tout couple de champs de vecteurs (A,B) sur T_2M :

$$[J_2A,J_2B] = J_2[A,J_2B] + J_2[J_2A,B] - 2J_1[A,B] \qquad (1)$$

$$[J_1A,J_1B] = J_1[A,J_1B] + J_1[J_1A,B] \qquad (2)$$

$$[J_1A,J_2B] = J_2[J_1A,B] + J_1[A,J_2B] \qquad (3)$$

Nous allons définir deux champs canoniques sur T_2M , à l'aide des 2 suites exactes.

§ 4 - CHAMPS CANONIQUES SUR T_2M .

Considérons le fibré vectoriel $T_2M \underset{TM}{\times} TTM$, de base T_2M . Appelons i l'injection naturelle de T_2M dans TTM , qui à $X = J^2_0 f$ appartenant à T_2M associe $i(X) = J^1_0(J^1 f)$.

En coordonnées locales, si $X = (x,y,z)$ alors $i(X) = (x,y,y,z)$. Soit α la section du fibré vectoriel précédent, définie ainsi :
$\alpha = id_{T_2M} \underset{TM}{\times} i$.

L'application $i_1 \circ h_2 \circ \alpha$ de T_2M dans TT_2M est un champ de vecteurs que l'on notera C_2 .

Localement, nous avons :

$$C_2(x,y,z) = y_i\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)(x,y,z) + 2z_i\left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right)(x,y,z)$$

ou : $C_2(x,y,z) = (x,y,z,0,y,2z)$

On définit le champ canonique C_1 de manière analogue : soit β la section naturelle du fibré vectoriel de base T_2M , $T_2M \underset{M}{\times} TM$, c'est-à-dire : $\beta = id_{T_2M} \underset{M}{\times} \pi_{12}$.

Alors $C_1 = i_2 \circ h_1 \circ \beta$ est un champ de vecteurs sur T_2M . Localement, le champ canonique C_1 s'exprime ainsi :

$$C_1(x,y,z) = y_i\left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right)(x,y,z)$$

ou : $C_1(x,y,z) = (x,y,z,0,0,y)$.

Les propriétés suivantes sont immédiates :

$$J_1C_1 = 0 \qquad J_2C_1 = 0$$

$$J_1C_2 = 0 \qquad J_2C_2 = 2C_1$$

$$[C_1,C_2] = C_1$$

Etudions le crochet d'un champ de vecteurs canonique et d'un tenseur canonique.

Un calcul en coordonnées locales donne : $[C_2,J_2] = -J_2$.

Explicitons $[C_1,J_2]A$:

$$\begin{aligned}
[C_1,J_2]A &= [C_1,J_2A] - J_2[C_1,A] \\
&= \tfrac{1}{2}[J_2C_2,J_2A] - \tfrac{1}{2}J_2[J_2C_2,A] \\
&= \tfrac{1}{2}(J_2[C_2,J_2A] - J_2.J_2[C_2,A]) \quad \text{d'après (1) p. 8} \\
&= \tfrac{1}{2}J_2.[C_2,J_2]A = -\tfrac{1}{2}J_2.J_2A = -J_1A \ .
\end{aligned}$$

La formule $[X,hk] = [X,h]k + h[X,k]$ appliquée pour h et k égaux à J_2 et X égal à C_2 donne :

$$[C_2,J_1] = -2J_1 .$$

Pour $X = C_1$, on obtient $[C_1,J_1] = 0$.
D'où :

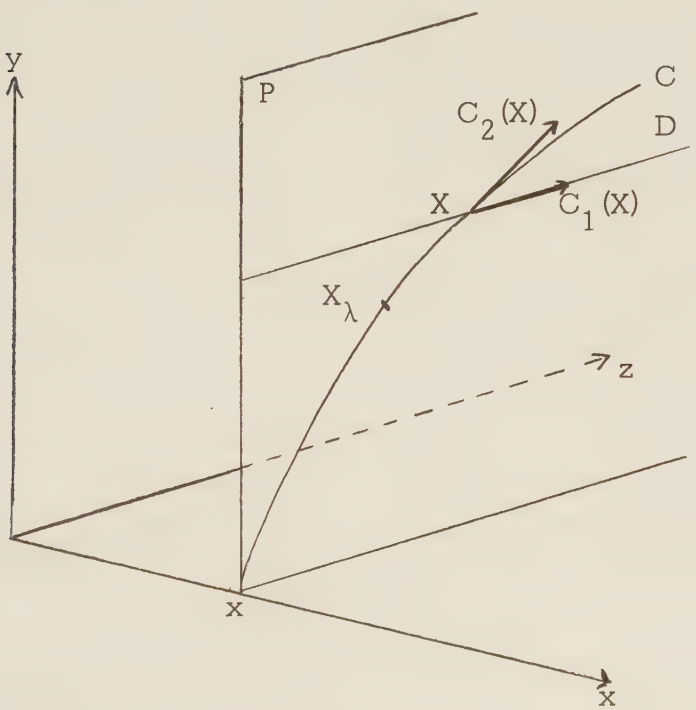
Propriété I-4.1.

Les champs de vecteurs et tenseurs canoniques vérifient :

$[C_2,J_2] = -J_2$	$[C_2,J_1] = -2J_1$
$[C_1,J_2] = -J_1$	$[C_1,J_1] = 0$

Interprétation géométrique des champs de vecteurs canoniques.

Soit X un élément de T_2M : $X = J_0^2 f = (x,y,z)$.



Sur ce dessin, la variété M est $\mathbb{R}$; T_2M est identifié à $\mathbb{R}^3$. Le plan P représente la fibre au-dessus de x de la variété fibrée (T_2M,M,π_2) , soit $\pi_2^{-1}.\pi_2(X)$. La droite D représente la fibre

au-dessus de (x,y) de la variété fibrée (T_2M, TM, π_{12}) , soit $\pi_{12}^{-1}\pi_{12}(X)$.

Le changement de paramètre $t \to \lambda t$ dans $\mathbb{R}$, induit les courbes f_λ dans M :

$$f_\lambda : \mathbb{R} \to M$$
$$t \mapsto f(\lambda t)$$

où f est telle que : $J_0^2 f = X$.

Aux courbes f_λ sont associés les jets $X_\lambda = J_0^2(f_\lambda)$, qui ne dépendent pas du choix de f .

On a : $$X_\lambda = (x, \lambda y, \lambda^2 z) .$$

Les éléments X_λ de T_2M appartiennent à la fibre $\pi_2^{-1}\pi_2(X)$. L'application C de $\mathbb{R}$ dans T_2M qui à λ associe X_λ , est une courbe dans $\pi_2^{-1}\pi_2(X)$, qui passe par X : $C(1) = X$. Son vecteur tangent en ce point est : $C'(1) = (0, y, 2z)$, c'est-à-dire $C_2(X)$. Le champ de vecteurs C_2 est donc lié à la transformation d'un élément de T_2M par un changement de paramètre réel, du type $t \to \lambda t$.

On peut interprèter le champ canonique C_1 , en utilisant le changement de paramètre : $t \to \frac{1}{2}\lambda t^2 + t$, dans $\mathbb{R}$.

Soient g_λ les courbes dans M déduites de f par cette transformation :

$$g_\lambda(t) = f(\tfrac{1}{2}\lambda t^2 + t) .$$

Le jet y_λ associé à g_λ a pour expression localement :

$$y_\lambda = (x, y, z + \lambda y) .$$

L'application D , qui à λ associe y_λ est une courbe dans $\pi_{12}^{-1}.\pi_{12}(X)$, et plus précisément une droite. Elle passe par X pour la valeur 0 de λ et son vecteur tangent en X est :

$$D'(0) = (0, 0, y) \text{ , soit : } C_1(X) .$$

§ 5 - HOMOGENEITE.

On désignera par $(\mathcal{T}_2M, \pi_2^0, M)$ la sous-variété fibrée de (T_2M, π_2, M) obtenue en enlevant la section nulle, c'est-à-dire les jets des applications constantes de $\mathbb{R}$ dans M.

L'action du champ de vecteurs C_2 sur une fonction mesure l'homogénéité de celle-ci, dans le sens suivant :

Définition I-5.1.

Soit f une fonction différentiable sur $\mathcal{T}_2M$; f est (positivement) homogène de degré r, si pout tout λ, réel strictement positif, on a :

$$f(x,\lambda y,\lambda^2 z) = \lambda^r f(x,y,z) ,$$

où (x,y,z) parcourt $\mathcal{T}_2M$.

Ceci s'écrit encore, avec les notations du paragraphe précédent :

$$f(X_\lambda) = \lambda^r f(X) ,$$

X_λ étant le transformé de X par le changement de paramètre réel associé à C_2.

Proposition I-5.1.

Une application f de $\mathcal{T}_2M$ dans $\mathbb{R}$, différentiable, est homogène de degré r, si et seulement si :

$$\boxed{C_2 f = rf}$$

La démonstration est évidente.

L'identité $C_2 f = rf$ se traduit localement par :

$$y_k \frac{\partial f}{\partial y_k}(x,y,z) + 2z_k \frac{\partial f}{\partial z_k}(x,y,z) = rf(x,y,z) .$$

Considérons le cas d'un champ de vecteurs :

Définition I-5.2.

Un champ de vecteurs A , défini sur $\mathcal{T}_2M$, est homogène de degré r , si

$$\boxed{[C_2, A] = rA}$$

Soit $A = A_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \overline{A}_i \frac{\partial}{\partial y_i} + \overline{\overline{A}}_i \frac{\partial}{\partial z_i}$.

La condition $[C_2, A] = rA$ est équivalente à :

$$\left| \begin{array}{l} C_2 . A_i = rA_i \\ C_2 . \overline{A}_i = (r+1)\overline{A}_i \\ C_2 . \overline{\overline{A}}_i = (r+2)\overline{\overline{A}}_i \end{array} \right. .$$

Le champ de vecteurs A est homogène de degré r si et seulement si ses composantes A_i , $\overline{A}_i$, $\overline{\overline{A}}_i$ sont homogènes de degrés respectifs r , $r+1$, $r+2$.

On a, de même, pour une forme vectorielle :

Définition I-5.3.

Une p-forme vectorielle L sur $\mathcal{T}_2M$ est homogène de degré r si :

$$\boxed{[C_2, L] = rL}$$

Soit L une 1-forme vectorielle sur $\mathcal{T}_2M$. En un point (x,y,z) de $\mathcal{T}_2M$, L est représentée matriciellement par :

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ \overline{L}_1 & \overline{L}_2 & \overline{L}_3 \\ \overline{\overline{L}}_1 & \overline{\overline{L}}_2 & \overline{\overline{L}}_3 \end{pmatrix}$$

La 1-forme L est homogène de degré r si et seulement si :

L_1 , $\overline{L_1}$, $\overline{\overline{L_1}}$ sont homogènes de degrés respectifs r , $r+1$, $r+2$,

L_2 , $\overline{L_2}$, $\overline{\overline{L_2}}$ sont homogènes de degrés respectifs $r-1$, r , $r+1$,

L_3 , $\overline{L_3}$, $\overline{\overline{L_3}}$ sont homogènes de degrés respectifs $r-2$, $r-1$, r .

Les tenseurs J_2 et J_1 sont donc homogènes de degrés -1 et -2 respectivement.

Considérons le champ canonique C_1 :

Proposition I-5.2.

Soit f une fonction définie et différentiable sur $\mathcal{T}_2 M$; f vérifie $C_1 f = rf$ si et seulement si :

$$f(x,y,z+\lambda y) = e^{r\lambda} f(x,y,z) .$$

La démonstration est évidente.

L'invariance, à un facteur près, d'une fonction f sous l'action du champ de vecteurs C_2 est liée à un changement de paramètre linéaire.

Considérons le cas d'un changement de paramètre u , deux fois dérivable. Un jet $X = J_0^2 h$ se transforme en un jet $X_u = J_0^2 (h \circ u)$.

Si $X = (x,y,z)$, alors :

$$X_u = (\bar{x}, \bar{y}.u'(0) , \bar{z}.(u'(0))^2 + \bar{y}.u''(0)) .$$

Posons : $\overline{X} = (\bar{x},\bar{y},\bar{z})$; si $u(0)$ est nul, alors $\overline{X}$ est égal à X . On remarque :

| $f(X_u)$ est égal à $f(\overline{X})$ si et seulement si $C_2 f$ et $C_1 f$ sont nuls.

Ceci est intéressant en calcul des variations, dans le sens suivant :

Désignons par L un lagrangien dépendant des dérivées secondes ; L est une fonction sur $\mathcal{J}_2 M$; l'intégrale de l'action de L le long d'une courbe $C = x(t)$, entre t_1 et t_2 est :

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(x, x', x'')dt$$

où x' et x'' désignent les dérivées première et seconde de x par rapport à t.

Soit u un changement de paramètre réel, tel que $\frac{du}{dt}$ soit différent de zéro en tout point. Posons : $u_1 = u(t_1)$; $u_2 = u(t_2)$.

$\dot{x}$ et $\ddot{x}$ désignent les dérivées première et seconde de x par rapport à u.

Proposition I-5.3.

L'intégrale I est invariante par un changement de paramètre, c'est-à-dire,

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(x, x', x'')dt = \int_{u_1}^{u_2} L(x, \dot{x}, \ddot{x})du ,$$

si et seulement si le lagrangien vérifie :

$$\begin{cases} C_2 L = L \\ C_1 L = 0 . \end{cases}$$

En effet, nous avons :

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(x, x', x'')dt = \int_{u_1}^{u_2} L(x, \lambda\dot{x}, \lambda^2\ddot{x} + \mu\dot{x}) \frac{1}{\lambda} du ,$$

avec $\lambda = \frac{du}{dt}$, $\mu = \frac{d^2u}{dt^2}$.

Donc si $C_2 L = L$ et $C_1 L = 0$,

$$L(x, \lambda\dot{x}, \lambda^2\ddot{x} + \mu\dot{x}) = \lambda L(x, \dot{x}, \ddot{x})$$

d'où l'invariance de l'intégrale. La réciproque est évidente.

L'intégrale I est invariante par changement affine de paramètre si et seulement si $C_2 L$ est égal à L .

On peut préciser la forme d'une fonction homogène de degré 1 ou 2 lorsqu'elle satisfait à des conditions de continuité sur la section nulle :

Proposition I-5.4.

Soit f une fonction définie sur T_2M , différentiable sur $\mathcal{T}_2M$.

1) Si f est homogène de degré 1 et C^1 sur la section nulle, alors :

$$f(x,y,z) = y_k f_k(x) \quad \text{où} \quad f_k(x) = \frac{\partial f}{\partial y_k}(x,0,0)$$

2) Si f est homogène de degré 2 et C^2 sur la section nulle, alors :

$$f(x,y,z) = y_k y_i f_{ki}(x) + z_k f_k(x) \ , \ \text{avec} \ f_{ki} = f_{ik} \ ,$$

où $f_{ki} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y_k \partial y_i}(x,0,0)$ et $f_k(x) = \frac{\partial f}{\partial z_k}(x,0,0)$.

Démontrons la seconde partie de la proposition :

La fonction f est homogène de degré 2 , donc :

$$f(x,\lambda y,\lambda^2 z) = \lambda^2 f(x,y,z) \ .$$

En dérivant deux fois par rapport à λ , on obtient une expression du type :

$$y_k y_i \frac{\partial^2 f}{\partial y_k \partial y_i}(x,\lambda y,\lambda^2 z) + 2 z_k \frac{\partial f}{\partial z_k}(x,\lambda y,\lambda^2 z) + \lambda A(x,\lambda y,\lambda^2 z) = 2f(x,y,z) \ .$$

(A étant une certaine fonction sur T_2M).

La fonction f étant C^2 sur la section nulle, en faisant tendre λ vers zéro, on a :

$$y_k y_i \frac{\partial^2 f}{\partial y_k \partial y_i}(x,0,0) + 2 z_k \frac{\partial f}{\partial z_k}(x,0,0) = 2f(x,y,z) \ ;$$

d'où la proposition.

§ 6 - SPRAYS DE TYPES 1 ET 2.

Soit α une courbe dans M : $\alpha : t \to x(t)$. On désignera par α' et α'' les relèvements canoniques de α dans TM et T_2M respectivement :

$$\alpha' : \mathbb{R} \to TM$$
$$t \mapsto (x(t) , \frac{dx(t)}{dt})$$

$$\alpha'' : \mathbb{R} \to T_2M$$
$$t \mapsto (x(t) , \frac{dx(t)}{dt} , \frac{d^2x(t)}{dt^2}) .$$

Soit S une section du fibré tangent à T_2M , différentiable sur $\mathcal{T}_2M$. On définit un spray de type 1 de la façon suivante :

Définition I-6.1.

S est un spray de type 1 s'il vérifie les deux conditions :

1) Pour toute courbe intégrale α de S , on a : $(\pi_2\alpha)' = \pi_{12}\alpha$.

2) S est homogène de degré 1 .

Soit $\alpha : t \to (x(t) , y(t) , z(t))$ une courbe intégrale de S . La condition : $(\pi_2\alpha)' = \pi_{12}.\alpha$ implique : $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$.

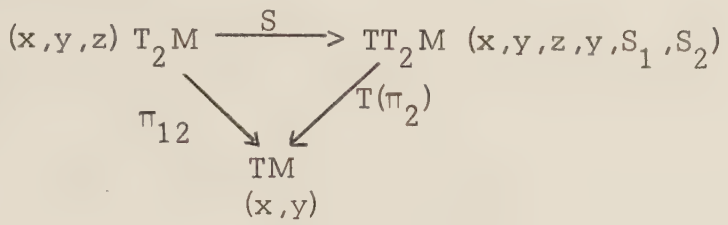
D'où : $S_{\alpha(t)} = (y(t) , \frac{dy(t)}{dt} , \frac{dz(t)}{dt})$.

La condition 1) entraîne donc :

$$S(x,y,z) = (x,y,z , y , S_1(x,y,z) , S_2(x,y,z)) .$$

Par conséquent, si S est homogène, son degré d'homogénéité est 1 . La condition 2) entraîne que les fonctions S_1 et S_2 sont homogénes de degrés respectifs 2 et 3 .

Une section S vérifie la condition 1) si et seulement si le diagramme suivant est commutatif :



Propriété I-6.1.

Soit S une section du fibré tangent à T_2M , différentiable sur $\mathcal{T}_2M$ et homogène de degré 1 ; S est un spray de type 1 si et seulement si :

$$\boxed{J_1S = C_1}$$

En effet, d'après les définitions de J_1 et C_1 , $J_1S = C_1$ est équivalent à :

$$i_2 \circ h_1 \circ s_1 \circ S = i_2 \circ h_1 \circ \beta \ .$$

Comme i_2 et h_1 sont des homomorphismes injectifs, ceci est encore équivalent à :

$$s_1 \circ S = \beta \ .$$

Or, $\quad s_1 = \pi \underset{M}{\times} T(\pi_2) \quad$ et $\quad \beta = id_{T_2M} \underset{M}{\times} \pi_{12}$.

De plus, $\pi \circ S = id_{T_2M}$; par suite : $T(\pi_2) \circ S = \pi_{12}$, ce qui est équivalent à la condition 1) d'après ce qui précède ; d'où la propriété.

On définit de même un spray de type 2 .

Définition I-6.2.

Soit S une section de (TT_2M , T_2M , π) différentiable sur $\mathcal{T}_2M$. S est un spray de type 2 s'il satisfait aux deux conditions :

1) Pour toute courbe intégrale α de S, on a : $(\pi_2 \circ \alpha)'' = \alpha$.

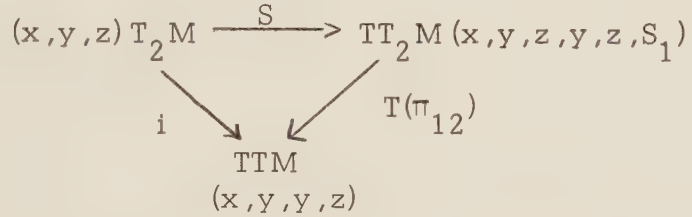
2) S est homogène de degré 1 .

En coordonnées locales, S est un spray de type 2 si et seulement si :

$$S(x,y,z) = (x,y,z,y,z,S_1(x,y,z))$$

où S_1 est homogène de degré 3 .

La condition 1) est équivalente à la commutativité du diagramme suivant :



Proposition I-6.2.

Soit S une section du fibré (TT_2M, T_2M, π), différentiable sur $\mathcal{T}_2M$, homogène de degré 1 ; S est un spray de type 2 si et seulement si :

$$\boxed{J_2 . S = C_2}$$

Les sprays de types 1 et 2 vérifient un certain nombre de relations dont nous aurons besoin par la suite.

Propriété I-6.1.

Soit S un spray de type 1 . Pour tout champ de vecteurs A sur $\mathcal{T}_2M$, les égalités suivantes sont vérifiées :

1) $J_1[J_1A, S] = 0$

2) $J_1[J_2A, S] = J_1A$

3) $J_2[J_1A,S] = [J_1,J_2S]A$

4) $J_2[J_2A,S] = [J_2,J_2S]A + 2J_1[A,S]$.

Cette propriété se déduit des relations obtenues au paragraphe 3. Un spray S de type 2 vérifie les égalités précédentes. De plus, comme : $J_2S = C_2$ et $[J_1,C_2] = 2J_1$ la relation 3) devient :

$$J_2[J_1A,S] = 2J_1A .$$

De même : $[J_2,C_2] = J_2$ implique pour 4) :

$$J_2[J_2A,S] = J_2A + 2J_1[A,S] .$$

D'où la propriété :

Propriété I-6.2.

Soient S un spray de type 2 et A un élément de $\mathfrak{X}(\mathcal{T}_2M)$. On a :

1) $J_1[J_1A,S] = 0$

2) $J_1[J_2A,S] = J_1A$

3) $J_2[J_1A,S] = 2J_1A$

4) $J_2[J_2A,S] = J_2A + 2J_1[A,S]$.

On en déduit les identités :

$J_1[J_1,S] = 0$	(1)
$J_1[J_2,S] = J_1$	(2)
$J_2[J_1,S] = 2J_1$	(3)
$J_2[J_2,S] = J_2$	(4)

Dans la suite, nous nous intéresserons aux 1-formes vectorielles $[J_2,S]$ et $[[J_1,S],S]$. Aussi les identités suivantes sont-elles utiles :

Propriété I-6.3.

Les 1-formes vectorielles $[J_2,S]$ et $[[J_1,S],S]$ vérifient :

1) $[J_2,S]J_2 = 2[J_1,S] - J_2$

2) $[J_2,S]J_1 = -2J_1$

3) $J_2[[J_1,S],S] = 2[J_1,S] - J_2$

4) $J_1[[J_1,S],S] = J_1$

5) $[[J_1,S],S]J_2 = -2[J_1,S]$

6) $[[J_1,S],S]J_1 = J_1$.

L'identité 1) provient de la formule :

$$[h,S]\circ k = [hk,S] - h\circ[k,S]$$

où h et k sont des 1-formes vectorielles, et de l'égalité 4) précédente.

1) implique 2) car $[J_1,S]\circ J_2 = -J_1$.

Démontrons l'identité 3) :

$$J_2[[J_1,S],S]A = J_2[[J_1,S]A,S] - J_2[J_1,S][A,S]$$

or,

$$J_2([J_1,S]-J_2) = 0 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Ker} J_2 = \operatorname{Im} J_1 .$$

Donc :

$$[J_1,S]A - J_2A = J_1B$$

d'où,

$$\begin{aligned} J_2[[J_1,S]A,S] &= J_2[J_2A,S] + J_2[J_1B,S] \\ &= J_2A + 2J_1[A,S] + 2J_1B \\ &= -J_2A + 2J_1[A,S] + 2[J_1,S]A \end{aligned}$$

d'où,

$$J_2[[J_1,S],S]A = -J_2A + 2[J_1,S]A$$

d'où la formule 3).

Les identités 4), 5) et 6) s'obtiennent de manière analogue.

Remarque :

Toutes les identités vérifiées par un spray S , dans ce paragraphe, le sont également par un champ de vecteurs A défini sur T_2M , vérifiant $J_1A = C_1$ ou $J_2A = C_2$, car l'homogénéité de S n'intervient pas dans les démonstrations.

§ 7 - FORMES SEMI-BASIQUES.

Définition I-7.1.

Soit L une forme vectorielle sur T_2M , de degré p supérieur ou égal à 1 ; L est π_{12}-semi-basique (resp. π_2-semi-basique) si :

1) $L(A_1,\dots,A_p)$ est un champ π_{12}-vertical (resp. π_2-vertical) , quels que soient les champs de vecteurs $A_1,\dots,A_p$.

2) $L(A_1,\dots,A_p)$ est nul si l'un des A_i est un champ π_{12}-vertical (resp. π_2-vertical) .

Un champ de vecteurs π_{12}-semi-basique est un champ π_{12}-vertical ; un champ π_2-semi-basique est π_2-vertical .

Ceci se traduit encore par :

L est π_{12}-semi-basique si et seulement si :

$$\left|\begin{array}{l} J_2L = 0 \\ i_{J_1A}L = 0 \quad \text{pour tout champ } A . \end{array}\right.$$

L est π_2-semi-basique si et seulement si :

$$\left|\begin{array}{l} J_1L = 0 \\ i_{J_2A}L = 0 \quad \text{pour tout champ } A . \end{array}\right.$$

Proposition I-7.1.

Soit L une p-forme vectorielle de degré supérieur ou égal à 1 , π_{12}-semi-basique (resp. π_2-semi-basique) . Il lui est associé une (p-1) forme vectorielle L_0 , π_{12}-semi-basique (resp. π_2-semi-basique) , où L_0 est égal à $i_S L$, S étant un spray de type 2 (resp. type 1) quelconque.

Si L est homogène de degré r , L_0 est homogène de degré (r+1) .

Considérons le cas où L est π_{12}-semi-basique . Montrons que L_0 est indépendante du choix de S ; si S et S' sont deux sprays de type 2 , alors $J_2(S-S')$ est nul ; S-S' est donc π_{12}-vertical d'où $i_{(S-S')}L$ est nul.

L_0 est π_{12}-semi-basique.

Si L est de degré supérieur ou égal à 2 , explicitons le crochet $[C_2, L_0]$:

$$[C_2,L_0](A_1,\dots,A_{p-1}) = [C_2,i_S L](A_1,\dots,A_{p-1})$$

$$= [C_2,i_S L(A_1,\dots,A_{p-1})] - \sum_{i=1}^{p-1} i_S L(A_1,\dots,[C_2,A_i],\dots A_{p-}$$

$$= [C_2,L(S,A_1,\dots,A_{p-1})] - (\sum_{i=1}^{p-1} L(S,A_1,\dots,[C_2,A_i],\dots,A_{p-}$$

$$+ L([C_2,S],A_1,\dots,A_{p-1})) + L([C_2,S],A_1,\dots,A_{p-1})$$

$$= [C_2,L](S,A_1,\dots,A_{p-1}) + L([C_2,S],A_1,\dots,A_{p-1}) .$$

S étant homogène, on a : $[C_2,S] = S$.

Si L est homogène de degré r :

$$[C_2,L_0](A_1,\dots,A_{p-1}) = (r+1)L(S,A_1,\dots,A_{p-1})$$

$$= (r+1)L_0(A_1,\dots,A_{p-1}) .$$

L_0 est donc homogène de degré $r+1$.

On démontre de même que le champ de vecteurs associé à une 1-forme vectorielle π_{12}-semi-basique et homogène, est homogène.

Dans le cas d'une forme π_2-semi-basique la démonstration est analogue à celle-ci.

En coordonnées locales, une 1-forme vectorielle π_{12}-semi-basique s'écrit :

$$L = (L^i_j dx_i + \bar{L}^i_j dy_i) \otimes \frac{\partial}{\partial z_j} \quad .$$

Le champ π_{12}-vertical associé est : $L_0 = (L^i_j y_i + \bar{L}^i_j z_i) \frac{\partial}{\partial z_j}$

Pour une 1-forme π_2-semi-basique , on a :

$$L = dx_i \otimes (L^i_j \frac{\partial}{\partial y_j} + \bar{L}^i_j \frac{\partial}{\partial z_j})$$

$$\text{et} \quad L_0 = L^i_j . y_i \frac{\partial}{\partial y_j} + \bar{L}^i_j . y_i \frac{\partial}{\partial z_j} \quad .$$

CHAPITRE II

CONNEXIONS SUR LE FIBRE TANGENT D'ORDRE 2

§ 1 - DEFINITIONS.

Soit Γ une 1-forme vectorielle sur T_2M . Pour que Γ se projette en une connexion sur M , il faut qu'elle vérifie :

$$J_1\Gamma = J_1$$

$$\text{et} \quad J_2\Gamma J_2 = -2J_1 = -J_2.J_2 \quad .$$

La deuxième condition s'écrit encore :

$$J_2(\Gamma J_2 + J_2) = 0 \ .$$

D'où la définition :

Définition II-1.1.

Une connexion de type 1 sur T_2M est une 1-forme vectorielle Γ sur T_2M , C^∞ sur $\mathcal{T}_2M$, telle que :

$$\boxed{\begin{aligned} J_1\Gamma &= J_1 \\ \Gamma J_2 &= -J_2 \end{aligned}}$$

Localement, on a :

$$\Gamma(x,y,z,p,q,r) = (x,y,z,p,p_i\Gamma^j_i(x,y,z) - q_j, p_i\overline{\Gamma}^j_i(x,y,z) - r_j) \ .$$

La matrice associée à $\Gamma_{(x,y,z)}$ est :

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ \Gamma_i^j(x,y,z) & -I & 0 \\ \overline{\Gamma}_i^j(x,y,z) & 0 & -I \end{pmatrix}$$

Une connexion de type 1 est caractérisée par la proposition suivante :

Proposition II-1.1.

Soit Γ une 1-forme vectorielle sur T_2M, $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{T}_2M$; Γ est une connexion de type 1 sur T_2M si et seulement si Γ^2 est le tenseur identité et si, pour tout élément X de T_2M, le sous-espace propre de Γ_X associé à la valeur propre -1 est $V_X^{\pi_2} T_2M$.

Soit Γ une connexion de type 1 sur T_2M.

$J_1\Gamma = J_1$ implique $J_1(\Gamma - I) = 0$, d'où : $\operatorname{Im}(\Gamma - I) \subset \operatorname{Ker} J_1$. De même, nous déduisons de $\Gamma J_2 = -J_2$: $\operatorname{Im} J_2 \subset \operatorname{Ker}(\Gamma + I)$. Comme $\operatorname{Ker} J_1$ est égal à $\operatorname{Im} J_2$, nous avons :

$$\operatorname{Im}(\Gamma - I) \subset \operatorname{Ker}(\Gamma + I) \quad , \text{ d'où } \Gamma^2 = I .$$

Soit $E_X = \{A \in T_X T_2M \ , \ \Gamma A = -A\}$.

E_X est donc le noyau de $(\Gamma + I)_X$; d'après ce qui précède :

$$\operatorname{Im} J_2 \subset \operatorname{Ker}(\Gamma + I) .$$

Or :

$$\operatorname{Ker}(\Gamma + I) \subset \operatorname{Ker} J_1(\Gamma + I) = \operatorname{Ker} J_1 .$$

Comme,

$$\operatorname{Im} J_2 = \operatorname{Ker} J_1 = V^{\pi_2} T_2M ,$$

on en conclut :

$$E_X = \operatorname{Ker}(\Gamma + I)_X = V_X^{\pi_2} T_2M .$$

Réciproquement, si Γ vérifie $\Gamma^2 = I$ et $E_X = V_X^{\pi_2} T_2M$ pour tout X de T_2M, on a :

$$(\Gamma+I)(\Gamma-I) = 0$$

$$\text{et} \quad \text{Ker}\,(\Gamma+I) = V^{\pi_2}T_2M = \text{Im}\, J_2 = \text{Ker}\, J_1 \ .$$

$\text{Im}\, J_2 = \text{Ker}\,(\Gamma+I)$ entraîne $(\Gamma+I)J_2 = 0$ soit $\Gamma J_2 = -J_2$. $\text{Im}\,(\Gamma-I)$ est inclus dans $\text{Ker}\,(\Gamma+I)$ soit dans $\text{Ker}\, J_1$; d'où

$$J_1(\Gamma-I) = 0 \quad \text{soit :} \quad J_1\Gamma = J_1 \ .$$

Γ est donc une connexion de type 1 .

A une connexion Γ de type 1 , on associe les endomorphismes suivants :

$$h = \frac{1}{2}(I+\Gamma) \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{2}(I-\Gamma) \ .$$

La proposition II-1.1. montre que h et v sont deux projecteurs supplémentaires ; ce sont les projecteurs respectivement horizontal et vertical de Γ . Ils vérifient les relations :

$J_1 h = J_1$	$J_1 v = 0$
$hJ_2 = 0$	$vJ_2 = J_2$

En un point X de T_2M , l'image du projecteur vertical est $V_X^{\pi_2} T_2M$; quant à l'espace horizontal, il est isomorphe à $T_{\pi_2(X)}M$. Les projecteurs h et v décomposent $T_X T_2M$ en une somme directe :

$$T_X T_2M = T_{\pi_2(X)}M \oplus V_X^{\pi_2} T_2M \ .$$

Une connexion Γ de type 1 est donc associée à la variété fibrée $(T_2M\,,M\,,\pi_2)$, l'espace horizontal étant isomorphe à l'espace tangent à la base et l'espace vertical étant l'espace tangent aux fibres. De manière similaire, nous allons associer à la variété fibrée $(T_2M\,,TM\,,\pi_{12})$ un second type de 1-forme vectorielle, les connexions de type 2 .

Définition II-1.2.

Une connexion de type 2 sur T_2M est une 1-forme vectorielle Γ sur T_2M, C^∞ sur $\mathcal{T}_2M$, telle que :

$$\boxed{\begin{aligned} J_2\Gamma &= J_2 \\ \Gamma J_1 &= -J_1 \end{aligned}}$$

En coordonnées locales :

$$\Gamma(x,y,z,p,q,r) = (x,y,z,p,q,p_i\Gamma^j_i(x,y,z) + q_i\bar{\Gamma}^j_i(x,y,z) - r_j) \quad .$$

La matrice associée à $\Gamma_{(x,y,z)}$ est :

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \Gamma^j_i(x,y,z) & \bar{\Gamma}^j_i(x,y,z) & -I \end{pmatrix}$$

Une connexion de type 2 se projette donc suivant le tenseur identité de TM .

On caractérise une connexion de type 2 par une proposition analogue à la proposition II-1.1. :

Proposition II-1.2.

Soit Γ une 1-forme vectorielle sur T_2M, C^∞ sur $\mathcal{T}_2M$; Γ est une connexion de type 2 sur T_2M si et seulement si Γ^2 est égal à I, et si, pour tout X de T_2M, le sous-espace propre de Γ_X, associé à la valeur propre -1, est $V_X^{\pi_{12}} T_2M$.

La démonstration est analogue à celle de la proposition II-1.1.

Soient h et v les projecteurs, horizontal et vertical, associés à Γ .

Nous avons :

$$\begin{array}{|ll|} \hline J_2 h = J_2 & J_2 v = 0 \\ h J_1 = 0 & v J_1 = J_1 \\ \hline \end{array}$$

En un point X de T_2M , l'image du projecteur vertical est : $V_X^{\pi_{12}} T_2M$; l'image du projecteur horizontal est isomorphe à $T_{\pi_{12}(X)}TM$; d'où la décomposition en somme directe suivant h et v :

$$T_X T_2 M = T_{\pi_{12}(X)}TM \oplus V_X^{\pi_{12}} T_2 M \ .$$

L'espace horizontal est isomorphe à l'espace tangent à la base TM de la variété fibrée (T_2M , TM , π_{12}) ; l'espace vertical est l'espace tangent aux fibres. Une connexion de type 2 est associée à la variété fibrée (T_2M , TM , π_{12}) .

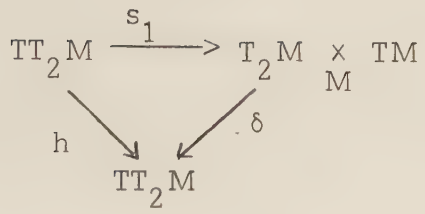
Chaque type de connexion est donc lié à une structure de variété fibrée sur T_2M . Ces deux structures ayant permis de construire les deux suites exactes du paragraphe I-2 , nous allons préciser le rapport entre un type de connexion et une suite exacte.

§ 2 - CONNEXIONS ET SUITES EXACTES.

Proposition II-2.1.

A une connexion de type 1 (respectivement de type 2) est associée de manière biunivoque une scission de la suite exacte 1 (resp. 2).

Démontrons cette proposition pour une connexion Γ de type 1 . Soit h le projecteur horizontal de Γ . Considérons s_1 , la projection de TT_2M sur $T_2M \underset{M}{\times} TM$; $\operatorname{Ker} s_1$ est inclus dans $\operatorname{Ker} J_1 = \operatorname{Im} J_2$. Comme hJ_2 est nul, $\operatorname{Im} J_2$ est inclus dans $\operatorname{Ker} h$; donc $\operatorname{Ker} s_1$ est inclus dans $\operatorname{Ker} h$. Il existe donc une application unique δ de $T_2M \underset{M}{\times} TM$ dans TT_2M , telle que le diagramme suivant soit commutatif :



Montrons que δ est une scission de la suite exacte (1) :

$$s_1 \circ \delta \circ s_1 = s_1 \circ h \ .$$

Or, $J_1 h = J_1$ s'écrit encore : $i_2 \circ h_1 \circ s_1 \circ h = i_2 \circ h_1 \circ s_1$; comme i_2 et h_1 sont injectifs, on en déduit : $s_1 \circ h = s_1$. D'où : $s_1 \circ \delta \circ s_1 = s_1$; s_1 étant surjectif, ceci implique :

$$s_1 \circ \delta = id_{T_2M \underset{M}{\times} TM} \ .$$

δ est donc une scission de la suite exacte (1).

Réciproquement, soit δ une scission de la suite exacte (1). Définissons Γ par : $\Gamma = 2\delta \circ s_1 - I$, d'où $h = \delta \circ s_1$.

On a :

$$J_1 \Gamma = 2 i_2 \circ h_1 \circ s_1 \circ \delta \circ s_1 - J_1 \ .$$

Comme $s_1 \circ \delta = id_{T_2M \underset{M}{\times} TM}$, on en déduit : $J_1 \Gamma = 2J_1 - J_1 = J_1$.

De plus : $$\Gamma J_2 = 2\delta \circ s_1 \circ i_1 \circ h_2 \circ s_2 - J_2 \ .$$

$s_1 \circ i_1$ est nul, d'où $\Gamma J_2 = -J_2$.

Γ est une connexion de type 1 ; d'où la proposition.

§ 3 - CONNEXIONS ET SPRAYS.

Nous allons définir les connexions homogènes et linéaires sur T_2M . D'après la forme des matrices associées à une connexion de type 1 ou 2 , on constate que le degré d'homogénéité d'une connexion ne peut être que nul.

Définition II-3.1.

On dira qu'une connexion Γ *sur* T_2M *est homogène, si la 1-forme vectorielle* $[C_2,\Gamma]$ *est nulle.*

Définition II-3.2.

Une connexion linéaire sur T_2M *est une connexion homogène,* C^2 *sur la section nulle.*

D'après l'expression en coordonnées locales d'une connexion, une connexion de type 1 est homogène si et seulement si les fonctions Γ_i^j et $\bar{\Gamma}_i^j$ sont homogènes de degrés respectifs 1 et 2 ; une connexion de type 2 est homogène si et seulement si les fonctions Γ_i^j et $\bar{\Gamma}_i^j$ sont homogènes de degrés respectifs 2 et 1 .

Propriété II-3.1.

Une connexion de type 1 sur T_2M *, linéaire, se projette par* $T(\pi_{12})$ *en une connexion linéaire sur* M .

En effet :

$$\Gamma(p,q,r) = (p, p_i\Gamma_i^j - q_j \ , \ p_i\bar{\Gamma}_i^j - r_j) \ .$$

Γ étant linéaire, les fonctions Γ_i^j sont homogènes de degré 1 et de classe C^2 sur la section nulle. D'après la proposition I-5.4., on a :

$$\Gamma_i^j(x,y,z) = y_k\Gamma_{ik}^j(x) \quad \text{où} \quad \Gamma_{ik}^j(x) = \frac{\partial\Gamma_i^j}{\partial y_k}(x,0,0) \ .$$

Les fonctions Γ_i^j peuvent être considérées comme fonctions sur TM . La projection Γ' de Γ sur TTM est :

$$\Gamma'(x,y,p,q) = (x,y,p, p_iy_k\Gamma_{ik}^j(x) - q_j) \ .$$

Il est évident que Γ' est une connexion linéaire sur TM .

Proposition II-3.1.

A une connexion homogène de type 1 (resp. de type 2) est associé de façon canonique, un spray de type 1 (resp. de type 2).

Démontrons la proposition pour une connexion Γ, de type 2, par exemple.

Soient h le projecteur horizontal de Γ et S un spray de type 2 quelconque.

Considérons le champ $S_1 = hS$; S_1 est indépendant du choix du spray S ; en effet si S et S' sont deux sprays de type 2, $(S-S')$ appartient à $\operatorname{Im} J_1$; comme hJ_1 est nul, hS et hS' sont égaux. Le champ S_1 est un spray de type 2 :

$$J_2 S_1 = J_2 hS = J_2 S = C_2$$

$$\text{et} \quad [C_2, S_1] = [C_2, hS] = [C_2, h]S + h[C_2, S] .$$

Or, $[C_2, h] = \frac{1}{2}[C_2, \Gamma] = 0$, car Γ est homogène et $[C_2, S] = S$.

D'où : $$[C_2, S_1] = hS = S_1 .$$

En coordonnées locales, le spray de type 1 associé à une connexion Γ de type 1 est :

$$S_1(x,y,z) = (x,y,z,y,\tfrac{1}{2}y_i\Gamma^j_i(x,y,z) \ , \tfrac{1}{2}y_i\overline{\Gamma}^j_i(x,y,z)) .$$

Si la connexion Γ est linéaire, alors, d'après la proposition I-5.4. :

$$\Gamma^j_i(x,y,z) = y_k\Gamma^j_{ik}(x)$$

$$\text{et} \quad \overline{\Gamma}^j_i(x,y,z) = y_k y_r \overline{\Gamma}^j_{ikr}(x) + z_k\overline{\Gamma}^j_{ik}(x)$$

$$\text{et} \quad S_1(x,y,z) = (x,y,z,y,\tfrac{1}{2}y_i y_k\Gamma^j_{ik}(x) \ , \tfrac{1}{2}y_i y_k y_r(x) + \tfrac{1}{2}y_i z_k\overline{\Gamma}^j_{ik}(x))$$

Le spray S_1 se projette sur TTM en un spray S', qui est le spray associé canoniquement à la connexion Γ' .

Le spray S_2 associé à une connexion Γ de type 2 est :

$$S_2(x,y,z) = (x,y,z,y,z,\tfrac{1}{2}y_i\Gamma^j_i(x,y,z) + \tfrac{1}{2}z_i\overline{\Gamma}^j_i(x,y,z)) \ .$$

Réciproquement, on définit, à l'aide d'un spray de type 2 , des connexions homogènes de types 1 et 2.

Proposition II-3.2.

Soit S un spray de type 2. La 1-forme vectorielle sur T_2M :

$$\boxed{\Gamma_1 = \frac{1}{3}\{2[J_2,S] + 2[[J_1,S],S] - I\}}$$

est une connexion homogène de type 1. Le spray de type 1 associé à Γ_1 est :

$$S_1 = \frac{1}{3}\{2S + [[C_1,S],S]\} \ .$$

Vérifions que Γ_1 est une connexion de type 1.

D'après les propriétés I-6.2. et I-6.3, nous avons :

$$\begin{aligned} J_1\Gamma_1 &= \frac{1}{3}\{2J_1[J_2,S] + 2J_1[[J_1,S],S] - J_1\} \\ &= \frac{1}{3}(2J_1 + 2J_1 - J_1) \\ &= J_1 \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} \Gamma_1 J_2 &= \frac{1}{3}\{2[J_2,S]J_2 + 2[[J_1,S],S]J_2 - J_2\} \\ &= \frac{1}{3}\{4[J_1,S] - 2J_2 - 4[J_1,S] - J_2\} \\ &= -J_2 \ . \end{aligned}$$

L'homogénéité du spray S entraîne celle de la connexion Γ_1 :

$$[C_2,\Gamma_1] = \frac{2}{3}\{[C_2,[J_2,S]] + [C_2,[[J_1,S],S]]\} \ .$$

En utilisant l'identité de Jacobi, on obtient :

$$[C_2,\Gamma_1] = \frac{2}{3}\{[J_2,[C_2,S]] - [J_2,S] + [[J_1,S],[C_2,S]] + [[J_1,[C_2,S]],S] - 2[[J_1,S],S]$$

Or $[C_2,S]$ est égal à S, donc $[C_2,\Gamma_1]$ est nul ; Γ_1 est une connexion de type 1 homogène.

Le calcul de h_1S, où h_1 est le projecteur horizontal de Γ_1, donne le spray S_1.

En coordonnées locales, si les composantes du spray S sont $(y_i,z_i,S_i(x,y,z))$, les fonctions Γ^j_{1i} et $\overline{\Gamma}^j_{1i}$ de la connexion Γ_1 s'expriment ainsi :

$$\Gamma^j_{1i} = \frac{2}{3}\frac{\partial S_j}{\partial z_i}$$

$$\overline{\Gamma}^j_{1i} = \frac{2}{3}\left[2\frac{\partial S_j}{\partial y_i} + \frac{\partial S_k}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial S_j}{\partial z_k} - y_k\frac{\partial^2 S_j}{\partial x_k \partial z_i} - S_k\frac{\partial^2 S_j}{\partial z_i \partial z_k} - z_k\frac{\partial^2 S_j}{\partial y_k \partial z_i}\right].$$

On remarque que si le spray S est C^4 sur la section nulle, la connexion Γ_1 est linéaire ; si le spray S est C^3 sur la section nulle, Γ^j_{1i} est homogène de degré 1 et C^2 sur la section nulle, par conséquent, la connexion Γ_1 est projetable en une connexion sur M.

Proposition II-3.3.

Soit S un spray de type 2. La 1-forme vectorielle sur T_2M :

$$\boxed{\Gamma_2 = \frac{1}{3}\{2[J_2,S] + I\}}$$

est une connexion homogène de type 2. Le spray de type 2 associé à Γ_2 est S.

De plus, si le spray S est C^3 sur la section nulle, la connexion est linéaire.

La 1-forme vectorielle Γ_2 est une connexion de type 2 car :

$$J_2\Gamma_2 = \frac{2}{3}J_2[J_2,S] + \frac{1}{3}J_2$$

$$= J_2$$

$$\Gamma_2 J_1 = \frac{2}{3}[J_2,S]J_1 + \frac{1}{3}J_1$$
$$= -J_1 .$$

Calculons $[C_2,\Gamma_2]$:

$$[C_2,\Gamma_2] = \frac{2}{3}[C_2,[J_2,S]]$$
$$= \frac{2}{3}[J_2,[C_2,S]] - \frac{2}{3}[J_2,S] .$$

Le spray S vérifiant $[C_2,S] = S$, on en déduit $[C_2,\Gamma_2] = 0$ et par suite Γ_2 est homogène.

Soit h_2 le projecteur horizontal de Γ_2 :

$$h_2 = \frac{1}{2}(I+\Gamma_2) = \frac{1}{3}([J_2,S]+2I) .$$

Le spray S_2 associé à Γ_2 est :

$$S_2 = h_2 S = \frac{1}{3}[J_2,S]S + \frac{2}{3}S$$
$$= \frac{1}{3}[C_2,S] + \frac{2}{3}S$$
$$= S .$$

Dans l'expression de $[J_2,S]$ en coordonnées locales, n'interviennent que les dérivées partielles du premier ordre des fonctions S_i , composantes du spray S . Il en résulte que si S est C^3 sur la section nulle, alors Γ_2 est C^2 sur la section nulle et donc, est linéaire.

La matrice associée à la connexion Γ_2 est :

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \frac{2}{3}\frac{\partial S_i}{\partial y_k} & \frac{4}{3}\frac{\partial S_i}{\partial z_k} & -I \end{pmatrix} .$$

On définit donc à l'aide d'un spray de type 2 , une connexion de type 1 , et une connexion de type 2. Nous allons expliciter le passage d'une connexion de type 1 à une connexion de type 2.

§ 4 - PASSAGE D'UN TYPE DE CONNEXION A L'AUTRE.

Dans ce paragraphe, on se donne un spray de type 2, S.

Proposition II-4.1.

Soit Γ_1 une connexion de type 1, de projecteur horizontal h_1. La 1-forme vectorielle :

$$\boxed{\Gamma_2 = 2\Gamma_1 + I - 2[J_2 h_1, S]}$$

est une connexion de type 2, homogène si Γ_1 est homogène. Si Γ_1 est la connexion associée à S selon la proposition II-3.2., alors Γ_2 est la connexion associée à S selon la proposition II-3.3..

Calculons $J_2[J_2 h_1, S]$ et $[J_2 h_1, S] J_1$.

- $J_2[J_2 h_1, S]A = J_2[J_2 h_1 A, S] - 2J_1 h_1 [A, S]$
  $= J_2 h_1 A + 2J_1[h_1 A, S] - 2J_1[A, S]$ (Prop. I-6.2.)
  $= J_2 h_1 A - 2J_1[v_1 A, S]$,

v_1 étant le projecteur vertical de Γ_1 : $v_1 = I - h_1$.

$J_1 v_1 = 0$ implique que $v_1 A$ est de la forme $J_2 B$. D'où,

$$J_1[v_1 A, S] = J_1[J_2 B, S] = J_1 B = \frac{1}{2} J_2 . J_2 B = \frac{1}{2} J_2 v_1 A .$$

On en déduit :

$$J_2[J_2 h_1, S] = J_2 \Gamma_1 .$$

- $[J_2 h_1, S] J_1 A = [J_2 h_1 J_1 A, S] - J_2 h_1 [J_1 A, S]$.

Or, $J_1[J_1 A, S]$ est nul (prop. I-6.2.) donc $[J_1 A, S]$ appartient à $\operatorname{Im} J_2$. Comme $h_1 J_2$ est nul, les deux termes de droite de l'identité précédente sont nuls ; d'où :

$$[J_2 h_1, S] J_1 = 0 .$$

On en déduit que Γ_2 est une connexion de type 2.

Supposons Γ_1 homogène : $[C_2,\Gamma_1] = [C_2,h_1] = 0$.

$$[C_2,\Gamma_2] = -2[C_2,[J_2h_1,S]]$$
$$= 2[J_2h_1,[S,C_2]] + 2[S,[C_2,J_2h_1]] .$$

Or,
$$[C_2,J_2h_1] = J_2[C_2,h_1] + [C_2,J_2]h_1$$
$$= -J_2h_1 .$$

$[S,C_2] = -S$, d'où :

$$[C_2,\Gamma_2] = -2[J_2h_1,S] - 2[S,J_2h_1]$$
$$= 0 .$$

La connexion Γ_2 est homogène.

Si Γ_1 est la connexion de type 1 associée à S , alors :

$$\Gamma_1 = \frac{1}{3}(2[J_2,S] + 2[[J_1,S],S] - I)$$
$$h_1 = \frac{1}{3}([J_2,S] + [[J_1,S],S] + I)$$
$$J_2h_1 = \frac{1}{3}(J_2 + 2[J_1,S] - J_2 + J_2)$$
$$J_2h_1 = \frac{1}{3}(2[J_1,S] + J_2)$$

d'où,

$$[J_2h_1,S] = \frac{2}{3}[[J_1,S],S] + \frac{1}{3}[J_2,S] .$$

$$\Gamma_2 = \frac{4}{3}[J_2,S] + \frac{4}{3}[[J_1,S],S] - \frac{2}{3}I + I - \frac{2}{3}[J_2,S] - \frac{4}{3}[[J_1,S],S] = \frac{2}{3}[J_2,S] + \frac{1}{3}I .$$

On retrouve la connexion de type 2 associée à S .

Proposition II-4.2.

Soit Γ_2 une connexion de type 2, de projecteurs horizontal et vertical h_2 et v_2 . La 1-forme vectorielle :

$$\boxed{\Gamma_1 = [h_2J_2,S] - v_2}$$

est une connexion de type 1, homogène si Γ_2 l'est.

Si Γ_2 est la connexion de type 2 associée à S, alors Γ_1 est la connexion de type 1 associée à S.

A l'aide des propriétés I-6.1. et I-6.2., nous obtenons :

$$J_1[h_2J_2, S] = J_1$$

et $$[h_2J_2, S]J_2 = -h_2J_2 .$$

On en déduit la proposition.

Désignons par F_{12} l'application qui à une connexion de type 1 associe une connexion de type 2 selon la proposition II-4.1., et F_{21}, l'application qui à une connexion de type 2 associe une connexion de type 1 selon II-4.2.

Proposition II-4.3.

L'application F_{12} est une bijection entre l'ensemble des connexions de type 1 (respectivement homogènes) et l'ensemble des connexions de type 2 (respectivement homogènes).

Ceci est une conséquence de :

$$\boxed{\begin{aligned} F_{12} \circ F_{21} &= Id_2 \\ F_{21} \circ F_{12} &= Id_1 \end{aligned}}$$

Id_1 et Id_2 désignent les applications identiques respectives de l'ensemble des connexions de type 1 et de l'ensemble des connexions de type 2.

Démontrons : $F_{21} \circ F_{12} = id_1$.

Soit Γ_1 une connexion de type 1.

$$\Gamma_2 = F_{12}(\Gamma_1) = 2\Gamma_1 + I - 2[J_2 h_1, S]$$

$$F_{21} \circ F_{12}(\Gamma_1) = F_{21}(\Gamma_2) = [h_2 J_2, S] - v_2 .$$

Or :

$$h_2 = \frac{1}{2}(I+\Gamma_2)$$

$$= 2h_1 - [J_2 h_1, S]$$

$$h_2 J_2 = 2h_1 J_2 - [J_2 h_1, S] J_2$$

$$= -[J_2 h_1, S].J_2$$

$$[J_2 h_1, S] J_2 A = -J_2 h_1 [J_2 A, S] .$$

Mais $J_1([J_2 A, S] - A) = 0$ implique que $[J_2 A, S] - A$ appartient à $\operatorname{Im} J_2$; comme $h_1 J_2$ est nul, on en déduit :

$$h_1 [J_2 A, S] = h_1 A$$

d'où,

$$[J_2 h_1, S] J_2 = -J_2 h_1$$

et

$$h_2 J_2 = J_2 h_1 .$$

De plus,

$$v_2 = \frac{1}{2}(I - \Gamma_2) = [J_2 h_1, S] - \Gamma_1 .$$

Nous avons donc :

$$F_{21} \circ F_{12}(\Gamma_1) = [J_2 h_1, S] - [J_2 h_1, S] + \Gamma_1 = \Gamma_1 .$$

On démontre de manière analogue : $F_{12} \circ F_{21} = id_2$. D'où la proposition.

En conclusion, un spray S de type 2 permet de construire une connexion de type 1, une connexion de type 2 et établit une bijection entre l'ensemble des connexions de type 1 et l'ensemble des connexions de type 2, respectant l'homogénéité.

§ 5 - DECOMPOSITION D'UNE CONNEXION DE TYPE 2.

Dans ce paragraphe, nous allons montrer qu'une connexion Γ, homogène, de type 2, est entièrement déterminée par le spray de type 2 qui lui est associé et par sa torsion forte.

Définition II-5.1.

La torsion faible d'une connexion de type 2, Γ, est la 2-forme vectorielle :

$$\boxed{t_2 = [J_2, \Gamma]}$$

Propriété II-5.1.

La torsion faible est une forme vectorielle π_{12}-semi-basique.

En effet :

$$\begin{aligned} J_2[J_2,\Gamma](X,Y) &= J_2[J_2X,\Gamma Y] + J_2[\Gamma X,J_2Y] + 4J_1[X,Y] \\ &\quad -2J_1[X,\Gamma Y] - J_2[J_2X,Y] - J_2[X,J_2Y] - 2J_1[\Gamma X,Y] \\ &= -2J_2[J_2X,v(Y)] - 2J_2[v(X),J_2Y] \\ &\quad + 4J_1[X,v(Y)] + 4J_1[v(X),Y] \ , \end{aligned}$$

v étant le projecteur de Γ.

Γ étant une connexion de type 2, il existe A tel que : $v(Y) = J_1A$; d'où :

$$J_2[J_2X,v(Y)] = J_2[J_2X,J_1A] = 2J_1[X,J_1A] = 2J_1[X,v(Y)] \ .$$

On en déduit : $J_2t_2 = 0$.

On démontre de même : $i_{J_1A}t_2 = 0$, pour tout champ de vecteurs A , d'où la propriété.

D'après la proposition I-7.1., nous pouvons introduire la définition suivante :

Définition II-5.2.

La torsion forte de la connexion Γ est la 1-forme vectorielle π_{12}-semi-basique :

$$\boxed{T_2 = i_S t_2}$$

S étant un spray de type 2 quelconque.

Proposition II-5.1.

La torsion forte T_2 d'une connexion Γ de type 2 et homogène est égale à :

$$\boxed{3\Gamma - I - 2[J_2, S]}$$

S étant le spray associé à Γ .

Par définition de T_2 , nous avons : $T_2 = i_S[J_2, \Gamma]$.

Prenons pour S le spray de type 2 associé à la connexion Γ ; si h est le projecteur horizontal de Γ , alors :

$$S = hS' \text{ , d'où } \Gamma S = \Gamma hS' = hS' = S \quad (\text{car } \Gamma^2 = I) .$$

D'où :

$$T_2 = J_2[\Gamma, S] - [J_2, S] + \Gamma [J_2, S] .$$

Calculons $\Gamma[J_2, S]$:

$J_2([J_2, S] - I) = 0$ implique $[J_2, S] - I$ appartient à $\operatorname{Im} J_1$; comme $\Gamma J_1 = -J_1$, on en déduit :

$$\Gamma[J_2, S] = \Gamma - [J_2, S] + I .$$

Calculons $J_2[\Gamma, S]$:

$$J_2[\Gamma, S] = J_2[\Gamma - I, S] .$$

De : $J_2(\Gamma - I) = 0$ et $J_2[J_1, S] = 2J_1$, on déduit : $J_2[\Gamma, S] = 2(\Gamma - I)$.

D'où : $$T_2 = 2(\Gamma - I) - [J_2,S] + \Gamma - [J_2,S] + I$$
$$= 3\Gamma - I - 2[J_2,S] .$$

On remarque que si S est le spray associé à Γ, alors :

$$T_2(S) = 3\Gamma S - S - 2[C_2,S]$$
$$= 3S - S - 2S$$
$$= 0 .$$

Il en résulte la proposition suivante :

Proposition II-5.2.

Etant donné un spray S de type 2 et une 1-forme vectorielle T_2, π_{12}-semi-basique, telle que $T_2(S) = 0$, il existe une et une seule connexion homogène de type 2, de spray associé S et de torsion forte T_2. Elle est donnée par :

$$\boxed{\Gamma = \frac{2}{3}[J_2,S] + \frac{1}{3}I + \frac{1}{3}T_2}$$

On en déduit :

Il existe une et une seule connexion de type 2, homogène et à torsion nulle, de spray associé S. C'est la connexion de type 2 définie par la proposition II-3.3.

§ 6 - COURBURE D'UNE CONNEXION.

Définition II-6.1.

La courbure d'une connexion Γ de type quelconque est la 2-forme vectorielle définie sur T_2M, C^∞ sur $\mathcal{T}_2M$:

$$\boxed{R = -\frac{1}{2}[h,h]}$$

h étant le projecteur horizontal de la connexion.

Considérons les 2-formes vectorielles suivantes :

$$t_1 = [J_1,\Gamma] \quad ; \quad t_2 = [J_2,\Gamma] .$$

On démontre que la forme vectorielle t_1 est π_{12}-semi-basique si Γ est une connexion de type 2, et π_2-semi-basique si Γ est de type 1 ; t_2 est π_{12}-semi-basique si Γ est de type 2, mais n'est en général pas π_2-semi-basique si Γ est de type 1.

Propriété II-6.1.

Quelle que soit la connexion Γ, nous avons les relations suivantes :

$$[h,t_1] = 2[J_1,R]$$

$$[h,t_2] = 2[J_2,R]$$

$$[h,R] = 0 .$$

De plus, comme $[C_2,R] = -[h,[C_2,h]]$, la courbure d'une connexion homogène est homogène de degré zéro.

§ 7 - CONNEXION SUR T_2M INDUITE PAR UNE CONNEXION SUR M .

On note $\chi^{\pi_{12}}(T_2M)$ (resp. $\chi^{\pi_2}(T_2M)$) l'ensemble des champs de vecteurs π_{12}-verticaux (resp. π_2-verticaux) sur T_2M .

Soit ∇ une connexion linéaire sur T_2M, c'est-à-dire une loi de dérivation dans $\chi(T_2M)$. On considèrera l'application linéaire ∇C_2 de $\chi(T_2M)$ dans lui-même, qui à A, fait correspondre $\nabla_A C_2$.

Proposition II-7.1.

Soit ∇ une connexion linéaire sur T_2M, telle que :

1) $\nabla J_2 = 0$.

2) <u>L'application</u> ∇C_2 , <u>restreinte à</u> $\chi^{\pi_2}(T_2M)$, <u>est un isomorphisme</u>.

<u>Alors</u> ∇ <u>induit une connexion de type 1 sur</u> T_2M .

L'hypothèse 1) implique que l'image de ∇C_2 est incluse dans $\chi^{\pi_2}(T_2M)$.

Soit φ la restriction de ∇C_2 à $\chi^{\pi_2}(T_2M)$.

Considérons la 1-forme vectorielle :

$$\Gamma = I - 2\varphi^{-1}\nabla C_2 .$$

Nous avons : $J_1\Gamma = J_1 - 2J_1\varphi^{-1}\nabla C_2$.

D'après l'hypothèse 1), $J_1\varphi^{-1}\nabla C_2$ est nul, d'où : $J_1\Gamma = J_1$.

$$\Gamma J_2 = J_2 - 2\varphi^{-1}\nabla C_2 J_2 .$$

Or, $$(\nabla C_2)(J_2A) = \nabla_{J_2A}C_2 = \varphi(J_2A)$$

d'où : $$\varphi^{-1}\nabla C_2 J_2 = \varphi^{-1}\varphi J_2 = J_2$$

et $$\Gamma J_2 = J_2 - 2J_2 = -J_2 .$$

La 1-forme vectorielle Γ est une connexion de type 1 . Nous avons comme cas particulier la proposition suivante :

<u>Proposition II-7.2.</u>

<u>Toute connexion linéaire</u> ∇ <u>sur</u> T_2M , <u>à torsion nulle et telle que</u> ∇J_2 <u>soit nul, induit une connexion de type 1 sur</u> T_2M .

Soit ∇ une connexion linéaire vérifiant ces hypothèses. Montrons que ∇ satisfait à l'hypothèse 2) de la proposition précédente.

Pour tout A et pour tout B appartenant à $\mathfrak{X}(T_2M)$, on a :

$$\nabla_A J_2 B = J_2 \nabla_A B \quad \text{car} \quad \nabla J_2 = 0$$

$$\nabla_A B = \nabla_B A + [A,B] \quad \text{car} \quad \nabla \text{ est à torsion nulle .}$$

Il suffit de montrer l'injectivité de l'application ∇C_2 , sur $\mathfrak{X}^{\Pi 2}(T_2M)$:

Soit A un élément de $\mathfrak{X}^{\Pi 2}(T_2M)$; il existe B dans $\mathfrak{X}(T_2M)$, tel que $A = J_2 B$; calculons $\nabla_A C_2$:

$$\begin{aligned}
\nabla_A C_2 &= \nabla_{J_2 B} C_2 \\
&= \nabla_{C_2} J_2 B + [J_2 B, C_2] \\
&= J_2(\nabla_{C_2} B) + [J_2 B, C_2] \\
&= J_2 \nabla_B C_2 + J_2[C_2, B] + [J_2 B, C_2] \\
&= 2\nabla_B C_1 + [J_2, C_2] B \\
&= 2\nabla_B C_1 + A .
\end{aligned}$$

Supposons : $\nabla_A C_2 = 0$; d'où $A = -2\nabla_B C_1$. On en déduit :

$$J_2 A = -2 J_2 \nabla_B C_1 = -2 \nabla_B J_2 C_1 = 0 .$$

Il existe donc C appartenant à $\mathfrak{X}(T_2M)$ tel que $A = J_1 C$, d'où :

$$\begin{aligned}
\nabla_A C_2 &= \nabla_{J_1 C} C_2 \\
&= \nabla_{C_2} J_1 C + [J_1 C, C_2] \\
&= J_1 \nabla_{C_2} C + [J_1 C, C_2] \\
&= J_1 \nabla_C C_2 + J_1[C_2, C] + [J_1 C, C_2] \\
&= \nabla_C J_1 C_2 + [J_1, C_2] C \\
&= 2 J_1 C = 2A .
\end{aligned}$$

L'hypothèse $\nabla_A C_2 = 0$ entraîne donc $A = 0$.

Il en résulte la proposition II-7.2.

Nous allons définir, suivant l'article de K.Yano-S.Ishihara [1] les relevés de fonctions, de champs de vecteurs, de connexions, de M sur T_2M .

Relevés de fonction.

Soit f une application différentiable de $\mathbb{R}$ dans M ; f induit une application $f^{\#}$ de T_2M dans $T_2\mathbb{R}$; si X appartenant à T_2M s'écrit :

$X = J_0^2 g$ où g est une application de $\mathbb{R}$ dans M , on définit $f^{\#}$ par : $f^{\#}(X) = Y$, Y étant le jet d'ordre 2 en zéro de l'application $f \circ g$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; soit $f^{\#}(J_0^2 g) = J_0^2(f \circ g)$.

Les trois composantes de $f^{\#}$ dans $T_2\mathbb{R}$, constituent les relevés d'ordre 0, 1 et 2 de l'application f , soit f^0 , f^I , f^{II} .

Localement :

$$\left|\begin{array}{l} f^0(x,y,z) = f(x) \\ f^I(x,y,z) = y_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) \\ f^{II}(x,y,z) = y_i y_j \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + z_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) \ . \end{array}\right.$$

Relevés de champ de vecteurs.

Soit F une transformation de M . L'application $F^{\#}$:

$$\begin{array}{ccc} T_2M & \longrightarrow & T_2M \\ X = J_0^2 g & \longmapsto & F^{\#}(X) = J_0^2(F \circ g) \end{array}$$

est une transformation de T_2M .

Soient A un champ de vecteurs sur M et φ_t le groupe local à 1 paramètre qu'il engendre sur un ouvert U de M ; φ_t se relève en $\varphi_t^{\#}$ sur $\pi_2^{-1}(U)$; $\varphi_t^{\#}$ est un groupe local à un paramètre définissant un champ de vecteurs sur $\pi_2^{-1}(U)$, noté A^{II} , de composantes :

$(A_i^0 , A_i^I , A_i^{II})$, A_i étant une composante de A .

Considérons le champ de vecteur fA , où f est une application de T_2M dans $\mathbf{R}$. Le relevé de fA , $(fA)^{II}$, s'exprime ainsi :

$$(fA)^{II} = f^0 A^{II} + 2f^I A^I + f^{II} A^0 \quad ;$$

f^0 , f^I , f^{II} étant les relevés de la fonctions f .

A^I et A^0 sont des champs de vecteurs sur $\pi_2^{-1}(U)$, de composantes respectives $(0,0,A_i^0)$ et $(0,\frac{1}{2}A_i^0, A_i^I)$.

On vérifie que les champs de vecteurs locaux, A^0 , A^I , A^{II} , définis sur chaque $\pi_2^{-1}(U)$ déterminent 3 champs de vecteurs globaux sur T_2M , notés A^0 , A^I et A^{II} d'où :

Définition.

Les relevés d'ordre 0 , 1 et 2 d'un champ de vecteurs A sur M , de composantes A_i sont les champs de vecteurs sur T_2M , notés A^0 , A^I , A^{II} s'exprimant localement par :

$$A^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_i^0 \end{pmatrix} \qquad A^I = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}A_i^0 \\ A_i^I \end{pmatrix} \qquad A^{II} = \begin{pmatrix} A_i^0 \\ A_i^I \\ A_i^{II} \end{pmatrix}$$

De plus, pour tout champ de vecteurs A sur M et toute fonction f définie sur M , on a :

$$\left|\begin{array}{ll} (fA)^0 = f^0 A^0 & (1) \\ (fA)^I = f^0 A^I + f^I A^0 & (2) \\ (fA)^{II} = f^0 A^{II} + 2f^I A^I + f^{II} A^0 & (3) \\ A^I = \frac{1}{2} J_2 A^{II} & \\ A^0 = J_2 A^I = J_1 A^{II} & . \end{array}\right.$$

On définit également les relevés d'une forme différentielle scalaire. Puis si L est un élément quelconque de l'algèbre tensorielle de M ,

on construit trois éléments de l'algèbre tensorielle de T_2M , notés L^0 , L^I et L^{II} , de telle sorte que :

a) les applications : $L \to L^0$
$L \to L^I$
$L \to L^{II}$

soient linéaires,

b) par analogie avec les relations précédentes (1), (2), (3), on ait :

$$\left|\begin{array}{l} (L \otimes K)^0 = L^0 \otimes K^0 \\ (L \otimes K)^I = L^0 \otimes K^I + L^I \otimes K^0 \\ (L \otimes K)^{II} = L^0 \otimes K^{II} + 2L^I \otimes K^I + L^{II} \otimes K^0 \ . \end{array}\right.$$

Relevé d'une connexion.

Proposition II-7.3.

Soit ∇ une connexion linéaire sur M , de coefficients Γ^h_{ij} . Il existe une connexion linéaire unique sur T_2M , notée ∇^{II} , telle que :

$$\nabla^{II}_{A^{II}} B^{II} = (\nabla_A B)^{II}$$

pour tout A et pour tout B , champs de vecteurs sur M .

Un calcul en coordonnées locales donne :

$$\nabla^{II}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \Gamma^{h\,0}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_h} + \Gamma^{h\,I}_{ij} \frac{\partial}{\partial y_h} + \Gamma^{h\,II}_{ij} \frac{\partial}{\partial z_h}$$

$$\nabla^{II}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial y_j} = J_2\left(\nabla^{II}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \Gamma^{h\,0}_{ij} \frac{\partial}{\partial y_h} + 2\Gamma^{h\,I}_{ij} \frac{\partial}{\partial z_h}$$

$$\nabla^{II}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial z_j} = J_1\left(\nabla^{II}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \Gamma^{h\,0}_{ij} \frac{\partial}{\partial z_h}$$

$$\nabla^{II}_{\frac{\partial}{\partial y_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \nabla^{II}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial y_j}$$

$$\nabla^{II}_{\frac{\partial}{\partial y_i}} \frac{\partial}{\partial y_j} = J_2(\nabla^{II}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial y_j}) = 2\Gamma^{h}_{ij}{}^{0} \frac{\partial}{\partial z_h}$$

$$\nabla^{II}_{\frac{\partial}{\partial y_i}} \frac{\partial}{\partial z_j} = 0$$

$$\nabla^{II}_{\frac{\partial}{\partial z_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \nabla^{II}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial z_j}$$

$$\nabla^{II}_{\frac{\partial}{\partial z_i}} \frac{\partial}{\partial y_j} = 0$$

$$\nabla^{II}_{\frac{\partial}{\partial z_i}} \frac{\partial}{\partial z_j} = 0$$

Proposition II-7.4.

La connexion ∇^{II} satisfait aux hypothèses de la proposition II-7.1.

1) $\nabla^{II} J_2 = 0$.

Considérons l'application M de $\chi(T_2M) \times \chi(T_2M)$ dans $\chi(T_2M)$ définie par :

$$M(A,B) = \nabla^{II}_A J_2 B - J_2 \nabla^{II}_A B .$$

M est un tenseur de type (1,2) sur T_2M ; en effet, il suffit de vérifier :

$$M(A,fB) = fM(A,B) ,$$

f étant une fonction définie sur T_2M .

Or :
$$\begin{aligned} M(A,fB) &= \nabla^{II}_A J_2(fB) - J_2 \nabla^{II}_A (fB) \\ &= \nabla^{II}_A f.J_2 B - J_2(f\nabla^{II}_A B + (A.f)B) \\ &= f\nabla^{II}_A J_2 B + (A.f)J_2 B - fJ_2 \nabla^{II}_A B - (A.f)J_2 B \end{aligned}$$

$$= f(\nabla^{II}_A J_2 B - J_2 \nabla^{II}_A B)$$

$$= fM(A,B) \ .$$

On vérifie ensuite localement, à l'aide des formules de la page précédente, que M s'annule sur les champs de vecteurs de base.

∇^{II} vérifie donc la première hypothèse.

2) $\nabla^{II} C_2$, restreinte à $\chi^{\pi_2}(T_2M)$, est un isomorphisme.

Soit B un élément de $\chi^{\pi 2}(T_2M)$, de composantes $(0,q,r)$.

$$\varphi(B) = \nabla^{II}_B C_2 = q_i \nabla^{II}_{\frac{\partial}{\partial y_i}} C_2 + r_i \nabla^{II}_{\frac{\partial}{\partial z_i}} C_2 \ .$$

Or : $\nabla^{II}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} C_2 = y_j \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial y_k} + 2(y_j \Gamma^{k^I}_{ij} + z_j \Gamma^k_{ij}) \frac{\partial}{\partial z_k}$

$$\nabla^{II}_{\frac{\partial}{\partial y_i}} C_2 = \frac{\partial}{\partial y_i} + 2 y_j \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial z_k}$$

$$\nabla^{II}_{\frac{\partial}{\partial z_i}} C_2 = 2 \frac{\partial}{\partial z_i}$$

(On écrit Γ^k_{ij} au lieu de $\Gamma^{k^0}_{ij}$).

On en déduit :

$$\varphi(B) = q_i \frac{\partial}{\partial y_i} + 2(y_i q_i \Gamma^k_{ij} + r_k) \frac{\partial}{\partial z_k} \ .$$

On constate que φ est un isomorphisme sur $\chi^{\pi_2}(T_2M)$ et que φ^{-1} est donné par :

$$\varphi^{-1}(0,q_k,r_k) = (0,q_k,\frac{1}{2}r_k - y_j q_i \Gamma^k_{ij}) \ .$$

D'où la proposition II-7.4.

Il en résulte que ∇^{II} induit une connexion Γ de type 1 sur T_2M . Explicitons Γ :

$$\Gamma(A) = I - 2\varphi^{-1}\nabla^{II}_{A}C_2 \ .$$

Si A a pour composantes p,q,r , alors :

$$\nabla^{II}_{A}C_2 = (p_i y_j \Gamma^k_{ij} + q_k)\frac{\partial}{\partial y_k} + 2(p_i y_j \Gamma^{kI}_{ij} + p_i z_j \Gamma^k_{ij} + q_i y_j \Gamma^k_{ij} + r_k)\frac{\partial}{\partial z_k} \ .$$

D'après l'expression de φ^{-1} , on a :

$$\varphi^{-1}(\nabla^{II}_{A}C_2) = (p_i y_j \Gamma^k_{ij} + q_k)\frac{\partial}{\partial y_k} + [p_i y_j \Gamma^{kI}_{ij} + p_i z_j \Gamma^k_{ij} + q_i y_j \Gamma^k_{ij} + r_k - y_r y_j p_i \Gamma^k_{hr}\Gamma^h_{ij} - y_j q_i \Gamma^k_{ij}]\frac{\partial}{\partial z_k}$$

$$= (p_i y_j \Gamma^k_{ij} + q_k)\frac{\partial}{\partial y_k} + [p_i\{y_j \Gamma^{kI}_{ij} + z_j \Gamma^k_{ij} - y_r y_j \Gamma^k_{hr}\Gamma^h_{ij}\} + r_k]\frac{\partial}{\partial z_k} \ .$$

D'où :

(1) $$\Gamma(p,q,r) = (p_k, -2p_i y_j \Gamma^k_{ij} - q_k, -2p_i(y_j \Gamma^{kI}_{ij} - y_r y_j \Gamma^k_{hr}\Gamma^h_{ij}) - r_k) \ .$$

On remarque que la connexion ainsi obtenue est linaire.

Considérons une connexion linéaire Γ sur M , c'est-à-dire une 1-forme vectorielle sur TM , vérifiant $J\Gamma = J$ et $\Gamma J = -J$, où J est le tenseur canonique de type $(1,1)$ de la structure presque tangente de TM ; Γ est linéaire, c'est-à-dire homogène et de classe C^1 sur la section nulle (cf. [2]).

Proposition II-7.5.

Toute connexion linéaire Γ sur M induit une connexion linéaire $\tilde{\Gamma}$ de type 1 sur T_2M ; $\tilde{\Gamma}$ se projette sur TM en Γ . Si, localement,

$$\Gamma(p,q) = (p_k, p_i\Gamma^k_i - q_k) \ ,$$

alors :

$$\tilde{\Gamma}(p,q,r) = (p_k, p_i\tilde{\Gamma}^k_i - q_k, p_i\bar{\tilde{\Gamma}}^k_i - r_k) \ ,$$

avec :

$$\tilde{\Gamma}^k_i = \Gamma^k_i$$
$$\bar{\tilde{\Gamma}}^k_i = y_r \frac{\partial \Gamma^k_i}{\partial x_r} + z_r \frac{\partial \Gamma^k_i}{\partial y_r} + \frac{1}{2} \Gamma^k_h \Gamma^h_i$$

Localement : $\Gamma(p,q) = (p_k , p_i \Gamma^k_i - q_k)$, Γ^k_i étant une fonction définie sur TM .

La connexion Γ est linéaire ; par suite $\Gamma^k_i(x,y)$ s'écrit $y_j \Gamma^k_{ij}(x)$, et à Γ est associée une dérivée covariante ∇ de coefficients :

$$\Gamma'^k_{ij} = -\frac{1}{2} \Gamma^k_{ij} \quad .$$

D'après ce qui précède, ∇ se relève en ∇^{II} sur T_2M , laquelle induit une connexion de type 1 sur T_2M , soit $\tilde{\Gamma}$, suivant la formule (1) :

$$\tilde{\Gamma}(p,q,r) = (p_k , -2p_i y_j \Gamma'^k_{ij} - q_k , -2p_i (y_j \Gamma'^{kI}_{ij} + z_j \Gamma'^k_{ij} - y_r y_j \Gamma'^k_{hr} \Gamma'^h_{ij}) - r_k)$$

ou :

$$\tilde{\Gamma}(p,q,r) = (p_k , p_i y_j \Gamma^k_{ij} - q_k , p_i (y_j \Gamma^{kI}_{ij} + z_j \Gamma^k_{ij} + \frac{1}{2} y_r y_j \Gamma^k_{hr} \Gamma^h_{ij}) - r_k)$$

de $\Gamma^k_i = y_j \Gamma^k_{ij}$, on en déduit :

$$\tilde{\Gamma}(p,q,r) = (p_k , p_i \Gamma^k_i - q_k , p_i (y_r \frac{\partial \Gamma^k_i}{\partial x_r} + z_r \frac{\partial \Gamma^k_i}{\partial y_r} + \frac{1}{2} \Gamma^k_h \Gamma^h_i) - r_k) \quad .$$

Il en résulte les expressions de $\tilde{\Gamma}^k_i$ et $\bar{\tilde{\Gamma}}^k_i$.

La connexion $\tilde{\Gamma}$ est linéaire ; en effet :

$$\tilde{\Gamma}^k_i(x,y,z) = y_j \Gamma^k_{ij}(x)$$

et

$$\bar{\tilde{\Gamma}}^k_i(x,y,z) = y_j y_r \bar{\tilde{\Gamma}}^k_{ijr}(x) + z_r \bar{\tilde{\Gamma}}^k_{ir}(x) \quad ,$$

avec $\bar{\tilde{\Gamma}}^k_{ijr}$ symétrique en j et r , puisque :

$$\bar{\tilde{\Gamma}}^k_i(x,y,z) = y_j y_r \frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x_r} + \frac{1}{2} y_j y_r \Gamma^k_{hr} \Gamma^h_{ij} + z_j \Gamma^k_{ij}$$
$$= y_j y_r (\frac{1}{2} (\frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x_r} + \frac{\partial \Gamma^k_{ir}}{\partial x_j}) + \frac{1}{4} (\Gamma^k_{hr} \Gamma^h_{ij} + \Gamma^k_{hj} \Gamma^h_{ir})) + z_j \Gamma^k_{ij} \quad .$$

D'après la proposition I-5.4. , on en déduit la linéarité de $\tilde{\Gamma}$.

CHAPITRE III

STRUCTURE PRESQUE TANGENTE D'ORDRE DEUX

§ 1 - STRUCTURE PRESQUE TANGENTE D'ORDRE 2 SUR T_2M .

La structure de variété de T_2M a été définie au chapitre I, à l'aide de la structure de variété de M . Etudions la transformation induite dans T_2M par un changement de coordonnées dans M ; soient $(U,(x_i)_{i=1,\dots,n})$ et $(U',(x'_i)_{i=1,\dots,n})$ deux cartes locales de M au voisinage d'un point x ; ces deux cartes définissent dans T_2M les cartes : $(\pi_2^{-1}(U),(x_i,y_i,z_i)_{i=1,\dots,n})$ et $(\pi_2^{-1}(U'),(x'_i,y'_i,z'_i)_{i=1,\dots,n})$. Sur $\pi_2^{-1}(U\cap U')$, les coordonnées x'_i,y'_i,z'_i s'expriment en fonction des coordonnées x_i,y_i,z_i suivant les formules :

$$(I)\qquad \left|\begin{array}{l} x'_i = x'_i(x_j) \\ y'_i = \dfrac{\partial x'_i}{\partial x_k}\, y_k \\ z'_i = \dfrac{\partial^2 x'_i}{\partial x_k \partial x_r} y_k y_r + \dfrac{\partial x'_i}{\partial x_k} z_k \end{array}\right.$$

Soit X un élément de T_2M appartenant à $\pi_2^{-1}(U\cap U')$; si $(\frac{\partial}{\partial x_i}(X)\ ,\ \frac{\partial}{\partial y_i}(X)\ ,\ \frac{\partial}{\partial z_i}(X))_{i=1,\dots,n}$ et $(\frac{\partial}{\partial x'_i}(X)\ ,\ \frac{\partial}{\partial y'_i}(X)\ ,\ \frac{\partial}{\partial z'_i}(X))_{i=1,\dots,n}$ sont les bases de T_XT_2M adaptées aux deux cartes précédentes, les formules (I) impliquent, au voisinage de X :

$$\left|\begin{array}{l}
\dfrac{\partial}{\partial x_i} = \dfrac{\partial x_j}{\partial x'_i}\dfrac{\partial}{\partial x_j} + \dfrac{\partial^2 x_j}{\partial x'_i \partial x'_k} y'_k \dfrac{\partial}{\partial y_j} + \left(\dfrac{\partial^3 x_j}{\partial x'_i \partial x'_k \partial x'_r} y'_k y'_r + \dfrac{\partial^2 x_j}{\partial x'_i \partial x'_k} z'_k\right)\dfrac{\partial}{\partial z_j} \\
\dfrac{\partial}{\partial y'_i} = \dfrac{\partial x_j}{\partial x'_i}\dfrac{\partial}{\partial x_j} + 2\dfrac{\partial^2 x_j}{\partial x'_i \partial x'_k} y'_k \dfrac{\partial}{\partial z_j} \\
\dfrac{\partial}{\partial z'_i} = \dfrac{\partial x_j}{\partial x'_i}\dfrac{\partial}{\partial z_j} \quad .
\end{array}\right.$$

La matrice de passage est donc :

$$\begin{pmatrix}
\dfrac{\partial x_j}{\partial x'_i} & 0 & 0 \\
\dfrac{\partial^2 x_j}{\partial x'_i \partial x'_k} y'_k & \dfrac{\partial x_j}{\partial x'_i} & 0 \\
\dfrac{\partial^3 x_j}{\partial x'_i \partial x'_k \partial x'_r} y'_k y'_r + \dfrac{\partial^2 x_j}{\partial x'_i \partial x'_k} z'_k & \dfrac{2\partial^2 x_j}{\partial x'_i \partial x'_k} y'_k & \dfrac{\partial x_j}{\partial x'_i}
\end{pmatrix}$$

c'est-à-dire une matrice du type $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ B & A & 0 \\ C & 2B & A \end{pmatrix}$, où A appartient à $G\ell(n,\mathbb{R})$ et B et C sont des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Nous avons :

Propriété III-1.1.

Le sous-ensemble G *de* $G\ell(3n,\mathbb{R})$ *constitué des matrices* $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ B & A & 0 \\ C & 2B & A \end{pmatrix}$ *où* A *appartient à* $G\ell(n,\mathbb{R})$, B *et* C *appatiennent à* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *est un sous-groupe de Lie de* $G\ell(3n,\mathbb{R})$, *de dimension* $3n^2$.

Soit $T_2G\ell(n,\mathbb{R})$ le fibré tangent d'ordre 2 de $G\ell(n,\mathbb{R})$.

Propriété III-1.2.

Le groupe G *est isomorphe à* $T_2G\ell(n,\mathbb{R})$.

Etant donné une application différentiable f de la variété M dans la variété N , on définit :

$$f^{\#} : T_2M \longrightarrow T_2N$$
$$X = J^2_0 g \longrightarrow f^{\#}(X) = J^2_0(f \circ g)$$

Soient : $f_1 : Gl(n,\mathbb{R}) \times Gl(n,\mathbb{R}) \longrightarrow Gl(n,\mathbb{R})$
$(A , B) \qquad\qquad A.B$

et $f_2 : Gl(n,\mathbb{R}) \longrightarrow Gl(n,\mathbb{R})$
$A \longrightarrow A^{-1}$.

Les applications $f_1^{\#}$ et $f_2^{\#}$ définissent sur $T_2Gl(n,\mathbb{R})$ une structure de groupe. De plus, si f est l'application suivante :

$$f : Gl(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(A , x) \longrightarrow A(x) ,$$

l'application $f^{\#}$ permet d'identifier $T_2Gl(n,\mathbb{R})$ au sous-groupe G de $Gl(3n,\mathbb{R})$.

Considérons $\mathcal{F}(T_2M)$, le fibré des repères de T_2M . Les repères de T_2M induits par les repères de M définissent un sous-fibré principal $\mathcal{F}'(T_2M)$ de $\mathcal{F}(T_2M)$, de groupe structural G .

Par conséquent :

Proposition III-1.1.

La variété T_2M est munie d'une G-structure.

Proposition III-1.2.

La G-structure définie sur T_2M est intégrable.

Ceci est évident d'après la structure de variété de T_2M ; en effet, soit un point X de T_2M , de projection x dans M . Une carte $(U,(x_i)_{i=1,\ldots,n})$ de M en x donne une carte $(\pi_2^{-1}(U),(x_i,y_i,z_i)_{i=1,\ldots,n})$ de T_2M en X , et les repères naturels $\frac{\partial}{\partial x_i}(X)$, $\frac{\partial}{\partial y_i}(X)$, $\frac{\partial}{\partial z_i}(X)$

constituent une section de $\mathcal{F}'(T_2M)$ au-dessus de $\pi_2^{-1}(U)$, par définition.

Considérons le tenseur J_2 de type $(1,1)$ sur T_2M ; ce tenseur a ses composantes constantes relativement aux repères du fibré $\mathcal{F}'(T_2M)$; la matrice de ses composantes dans ces repères est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 2I & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit :

Propriété III-1.2.

Le tenseur J_2 est un tenseur spécial de la G-structure de T_2M .

On peut déterminer l'ensemble des tenseurs spéciaux de la G-structure de T_2M ; soit T un tenseur spécial de type $(1,1)$. Ses composantes sont constantes relativement aux repères de $\mathcal{F}'(T_2M)$: ceci équivaut à dire que T commute avec toutes les matrices du groupe G . Or on vérifie que le centre de G dans $\mathcal{M}_{3n}(\mathbb{R})$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3n}(\mathbb{R})$ engendré par les matrices associées à I , J_2 et J_1 (où $J_1 = \frac{1}{2} J_2^2$) . D'où :

Propriété III-1.3.

Les tenseurs spéciaux de la G-structure de T_2M constituent un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathcal{M}(3n,\mathbb{R})$; une base de ce sous-espace est : I , J_2 , J_1 .

Remarque : Le tenseur canonique J_2 de T_2M a les propriétés suivantes :

- J_2 est de rang constant $2n$.
- J_2^3 est nul.

On peut définir une structure presque tangente d'ordre 2 sur une variété quelconque de dimension $3n$.

§ 2 - STRUCTURE PRESQUE TANGENTE D'ORDRE 2 SUR UNE VARIETE DE DIMENSION 3n .

Soit M une variété différentiable de dimension $3n$ et soit G le sous-groupe de $G\ell(3n,\mathbb{R})$ défini au paragraphe 1.

Définition III-2.1.

On dit que la variété M est munie d'une structure presque tangente d'ordre 2 s'il existe une G-structure sur M .

Dans l'article [3], R.S. Clark et D.S. Goel définissent une structure presque tangente d'ordre 2 sur M comme étant une G'-structure, où G' est le groupe des matrices $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ B & A & 0 \\ C & B & A \end{pmatrix}$,

A appartenant à $G\ell(n,\mathbb{R})$, B et C étant des matrices carrées d'ordre n .

Les résultats exposés dans [3] sont valables dans le cadre de notre définition. En particulier, si la variété M est munie d'une structure presque tangente d'ordre 2, il existe un tenseur spécial de type $(1,1)$, J_2 , dont la matrice dans les repères adaptés est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 2I & 0 \end{pmatrix}$;

J_2 est de rang constant $2n$ et vérifie $J_2^3 = 0$. D'après [3], nous avons réciproquement :

Propriété III-2.1.

L'existence d'un tenseur J de type $(1,1)$ sur M , de rang constant $2n$ et tel que : $J^3 = 0$, implique l'existence d'une structure presque tangente d'ordre 2 sur M .

Définition III-2.2.

La variété M est munie d'une structure presque tangente d'ordre 2 intégrable si la G-structure est intégrable.

La G-structure définie sur M peut être construite à partir du tenseur J_2 ; d'après les travaux de J. Lehmann-Lejeune, [4], on peut dire, dans ce cas particulier, que l'intégrabilité de la G-structure est équivalente à la nullité du tenseur de Nijenhuis. D'où :

Propriété III-2.2.

Soit M une variété munie d'une structure presque tangente d'ordre 2, et soit J_2 le tenseur (1,1) qui lui est associé. La structure est intégrable si et seulement si :

$$[J_2, J_2] = 0$$

On peut généraliser ceci :

§ 3 - STRUCTURE PRESQUE TANGENTE D'ORDRE k .

Etant donné une variété M de dimension n, on définit le fibré tangent d'ordre k de M comme étant l'ensemble desjets d'ordre k, d'origine zéro, des applications différentiables de $\mathbb{R}$ dans M. De la même manière que dans le cas $k = 2$, on définit sur $T_k M$ une structure de variété différentiable, de dimension $(k+1)n$, à l'aide de la structure de variété de M.

De plus, si f est une application différentiable de M dans $\mathbb{N}$, on introduit l'application $f_{(k)} : T_k M \longrightarrow T_k(N)$

$$X = j_0^k g \longrightarrow J_0^k(f \circ g) = f_{(k)}(X) .$$

Soit $T_k(G\ell(n,\mathbb{R}))$ le fibré tangent d'ordre k de $G\ell(n,\mathbb{R})$. De même que dans le paragraphe III-1, $T_k(G\ell(n,\mathbb{R}))$ est munie d'une structure de groupe. L'application $f_{(k)}$ où f est :

$$f : G\ell(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(A \ , \ x) \qquad A(x)$$

permet d'identifier $T_k G\ell(n,\mathbb{R})$ au sous-groupe de $G\ell((k+1)n,\mathbb{R})$ des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix}
A_0 & & & & & & & & \\
A_1 & A_0 & & & & & & & \\
A_2 & C_2^1 A_1 & A_0 & & & & 0 & & \\
A_3 & C_3^1 A_2 & C_3^2 A_1 & A_0 & & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & & & \\
A_i & C_i^1 A_{i-1} & C_i^2 A_{i-2} & \cdots\cdots & C_i^{i-1} A_1 & A_0 & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & A_0 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \\
A_k & C_k^1 A_{k-1} & C_k^2 A_{k-2} & \cdots\cdots & C_k^{i-1} A_{k-(i-1)} & \cdots\cdots & C_k^{k-1} A_1 & & A_0
\end{pmatrix}$$

où A_0 appartient à $G\ell(n,\mathbb{R})$, $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sont des matrices carrées d'ordre n .

La $(i+1)^{\text{ème}}$ ligne de la matrice précédente "correspond" à la dérivée $i^{(\text{ème})}$ d'un produit de 2 applications, d'où l'obtention des coefficients $C_i^1, C_i^2, \ldots, C_i^{i-1}$.

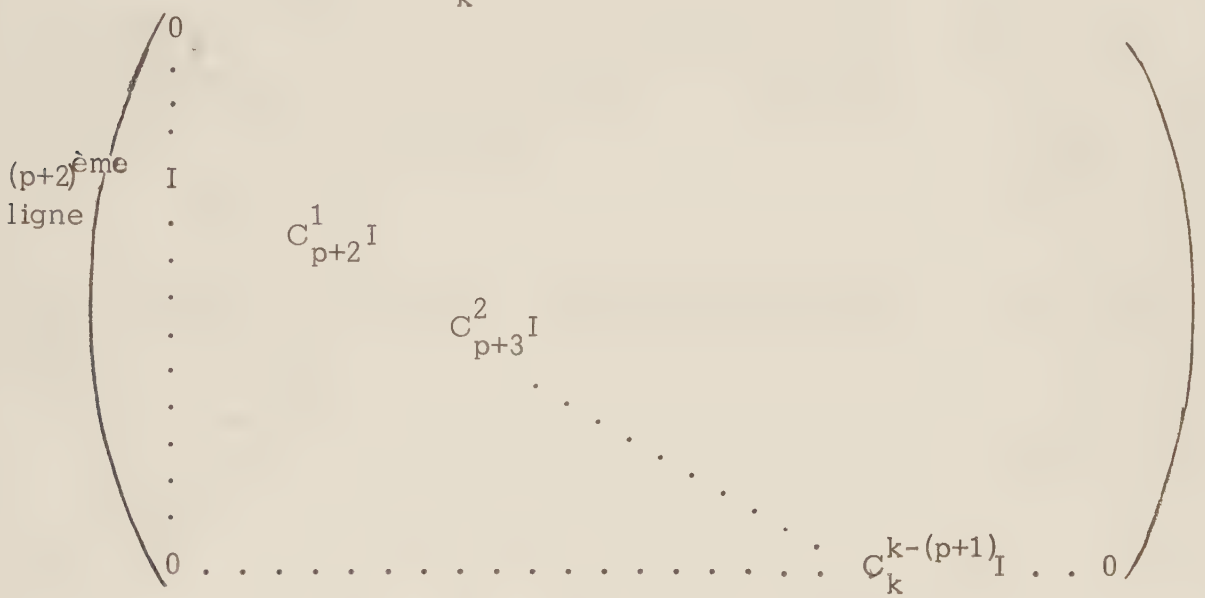
De même que pour $T_2 M$, on vérifie qu'un changement de cartes dans M induit un changement de cartes dans $T_k M$, d'où un changement de repères, un repère se déduisant de l'autre par une matrice du type précédent.

Notons G_k le sous-groupe de $G\ell((k+1)n,\mathbb{R})$ défini précédemment ; G_k est un sous-groupe de Lie de $G\ell((k+1)n,\mathbb{R})$ de dimension $(k+1)n^2$.

Définition III-3.1.

Soit M une variété différentiable de dimension (k+1)n ; M est munie d'une structure presque tangente d'ordre k s'il existe une G_k structure sur M .

Les tenseurs spéciaux de la G_k-structure constituent un sous-espace vectoriel de dimension (k+1) de $\mathcal{M}_{(k+1)n}(\mathbb{R})$. Une base de ce sous-espace est $(I, J_k, J_{k-1}, \ldots, J_1)$ où J_{k-p} est représenté dans les repères adaptés à la G_k-structure par la matrice :



les autres coefficients étant tous nuls.

Propriété III-3.1.

Les tenseurs spéciaux de la G_k-structure sont tous obtenus à partir de combinaisons linéaires des puissances de J_k car :

$$J_k^p = p!\, J_{k-p+1} \quad \text{pour tout } p \text{ variant de } 2 \text{ à } k .$$

$$J_k^{k+1} = 0$$

(On pose $J_k^0 = I$).

Cette propriété résulte de la formule suivante :

$$J_k \cdot J_{k-p} = (p+2) J_{k-p-1} \qquad p = 2 \ldots k \quad .$$

Proposition III-3.1.

Soit M une variété différentiable de dimension (k+1)n ; tout tenseur J de type (1,1), de rang constant kn sur M et tel que J^{k+1} soit nul, détermine une structure presque tangente d'ordre k sur la variété M .

Ceci résulte de la proposition suivante :

Proposition III-3.2.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie (k+1)n . Soit f une application linéaire de E dans E telle que :

- f soit de rang kn .
- $f^{k+1} = 0$.

Alors il existe une base de E telle que la matrice de f dans cette base soit J_k .

Le rang de f étant kn , le noyau de f est de dimension n .

D'où : (1) $Rg\ f^{p+1} \geq Rg\ f^p - n$, p variant de 1 à k .
S'il existe p tel que : $Rg\ f^{p+1} > Rg\ f^p - n$, on en déduit :

$$Rg\ f^{k+1} > Rg\ f - kn = 0$$

ce qui est contraire à l'hypothèse : $f^{k+1} = 0$.

On a donc :

$$(2)\quad Rg\ f^{p+1} = Rg\ f^p - n \quad ; \quad p = 1,2,\ldots,k$$

ou : $$\dim \operatorname{Ker} f^p = pn \quad ; \quad p = 1,\ldots,k \ .$$

Les égalités (2) impliquent : $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} f^p$; $p = 1,2,\ldots,k$.
Notons E_1 le noyau de f ; soit V_1 un supplémentaire de E_1 dans E : $E = E_1 \oplus V_1$.

Soit E_2 le sous-espace de V_1 tel que $f(E_2)$ soit E_1 ; E_2 est inclus dans $\operatorname{Ker} f^2$; E_1 étant de dimension n , E_2 est de dimension n et comme : $\dim \operatorname{Ker} f^2 = 2n$, on a :

$$\operatorname{Ker} f^2 = E_1 \oplus E_2 \ .$$

On construit ainsi une décomposition en somme directe de E : Soit V_p un supplémentaire de $\overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i$ dans E, où $\overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i$ est le noyau de $\operatorname{Ker} f^p$; soit E_{p+1} le sous-espace de V_p, tel que $f(E_{p+1})$ soit égal à E_p ; E_{p+1} est donc inclus dans $\operatorname{Ker} f^{p+1}$ et d'après les dimensions de $\overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i$ et de E_{p+1}, on en conclut :

$$\overset{p+1}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i = \operatorname{Ker} f^{p+1} .$$

D'où finalement :

$$\left|\begin{array}{l} E = \overset{k+1}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i \\ \dim E_i = n \qquad\qquad i = 1,2,\ldots,k \\ f(E_{i+1}) = E_i \end{array}\right.$$

Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E_{k+1}. On en déduit :

$(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ est une base de E_k,

$(f^i(e_1), f^i(e_2), \ldots, f^i(e_n))$ est une base de E_{k-i+1},

$(f^k(e_1), f^k(e_2), \ldots, f^k(e_n))$ est une base de E_1.

Considérons alors la base suivante de E :

$$(\ldots e_j \ldots, \ldots f(e_j) \ldots, \ldots \tfrac{1}{2} f^2(e_j), \ldots, \tfrac{1}{p} f^p(e_j), \ldots, \tfrac{1}{k} f^k(e_j) \ldots) .$$

La matrice de f relativement à cette base est :

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ I & & & & & \\ & 2I & & & & \\ & & 3I & & 0 & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & pI & \\ & & & & & \ddots \\ & 0 & & & & \\ & & & & kI & 0 \end{pmatrix}$$

, c'est-à-dire J_k

d'où la proposition III-3.2.

Définition III-3.2.

Une variété différentiable M de dimension $(k+1)n$ est munie d'une structure presque tangente d'ordre k, intégrable, si la G_k-structure associée est intégrable.

La proposition III-3.1. montre que la G_k-structure peut être construite à l'aide d'un tenseur J_k de type $(1,1)$, de rang constant kn et tel que : $J_k^{k+1} = 0$.

D'après la démonstration de la proposition III-3.2., le rang de J_k^p est $(k+1-p)n$, pour tout p variant de 1 à k. Dans ce cas particulier, l'intégrabilité de la G_k-structure est équivalente à la nullité du tenseur de Nijenhuis (cf. [4]). D'où :

Proposition III-3.3.

Soit M une variété différentiable de dimension $(k+1)n$, munie d'une structure presque tangente d'ordre k. Soit J_k le tenseur spécial de la propriété III-3.1. La structure presque tangente d'ordre k est intégrable si et seulement si :

$$[J_k, J_k] = 0 .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] - K. YANO - S. ISHIHARA

"Differential geometry of tangent bundles of order 2".
Kodai Math. Sem. Rep. 20.(1968) 318-354.

[2] - J. GRIFONE

"Structures presque tangentes et connexions".
Annales Institut Fourier. Tome 22. Fascicule I. (1972).

[3] - R.S. CLARK - D.S. GOEL

"Almost tangent manifolds of second order".
Tohoku Math. Journ. 24.(1972) 79.92.

[4] - J. LEHMANN - LEJEUNE

"Intégrabilité des G-structures définies par une 1-forme 0-déformable à valeurs dans le fibré tangent".

Ann. Inst. Fourier. Grenoble. 16,2(1966) 329-387.

LISTE DES PROFESSEURS

Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrométallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du Solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FELICI Noël	Electrostatique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques Pures
	GALVANI Octave	Mathématiques Pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques Pures
	GIRAUD Pierre	Géologie
	KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
Mme	KOFLER Lucie	Botanique et Physiologie végétale
MM.	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques Appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Sémiologie médicale
	MASSEPORT Jean	Géographie
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEEL Louis	Physique du Solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET René	Servomécanismes
	PILLET Emile	Physique industrielle
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REULOS René	Physique industrielle
	RINALDI Renaud	Physique
	ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
	SANTON Lucien	Mécanique
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SILBERT Robert	Mécanique des fluides
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLAND François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique Nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
M.	VERAIN André	Physique
Mme	VEYRET Germaine	Géographie
MM.	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	BULLEMER Bernhard	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BEAUDOING André	Pédiatrie
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	BOUCHET Robert	Mécanique des fluides
	BOUCHET Yves	Mathématiques Appliquées
	BOUVARD Maurice	Mécanique des fluides
	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BRUGEL Lucien	Energétique
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	DURAND Francis	Métallurgie
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques Appliquées
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide
	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
	KAHANE André	Physique générale
	KUHN Gérard	Physique
	LACOUME Jean-Louis	Physique
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LANCIA Roland	Physique atomique
	LE JUNTER Noël	Electronique
	LEROY Philippe	Mathématiques
	LOISEAUX Jean-Marie	Physique Nucléaire
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaire
	LUU DUC Cuong	Chimie Organique
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MAYNARD Roger	Physique du Solide
	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. "A")
	MICOUD Max	Maladies infectieuses
	MOREAU René	Hydraulique (INP)
	NEGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
	PFISTER Jean-Claude	Physique du Solide
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mlle	PIERY Yvette	Biologie animale
MM.	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RENAUD Maurice	Chimie
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	SHOM Jean Claude	Chimie Générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques Appliquées
	VEILLON Gérard	Mathématiques Appliquées (INP)
	VIALON Pierre	Géologie
	VOOG Robert	Médecine interne
	VROUSSOS Constantin	Radiologie
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mlle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Yves	Chimie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques Appliquées
	BILLET Jean	Géographie
	BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
	BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUVARD Maurice	Mécanique des Fluides
	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BRUGEL Lucien	Energétique
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	DURAND Francis	Métallurgie
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques Appliquées
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide
	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
	KAHANE André	Physique générale
	KUHN Gérard	Physique
	LACOUME Jean-Louis	Physique
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LANCIA Roland	Physique atomique
	LE JUNTER Noël	Electronique
	LEROY Philippe	Mathématiques
	LOISEAUX Jean-Marie	Physique Nucléaire
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaire
	LUU DUC Cuong	Chimie Organique
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MAYNARD Roger	Physique du Solide
	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. "A")
	MICOUD Max	Maladies infectieuses
	MOREAU René	Hydraulique (INP)
	NEGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
	PFISTER Jean-Claude	Physique du Solide
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mlle	PIERY Yvette	Biologie animale
MM.	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RENAUD Maurice	Chimie
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	SHOM Jean Claude	Chimie Générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques Appliquées
	VEILLON Gérard	Mathématiques Appliquées (INP)
	VIALON Pierre	Géologie
	VOOG Robert	Médecine interne
	VROUSSOS Constantin	Radiologie
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	CHEEKE John	Thermodynamique
	YACOUB Mahmoud	Médecine légale

CHARGE DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Arrêté du 30 Mai 1972

VU,

Grenoble, le

Le Président de la thèse,

C. CHABAUTY

VU, et permis d'imprimer

Grenoble, le

Le Président de l'Université scientifique
et médicale,

M. SOUTIF